

## Számítási módszerek a fizikában 1, 5. hét

### A tér affin altereinek felírása, egymástól vett távolságuk és a tér elemi lineáris transzformációinak a felírása

#### I. Affin alterek.

1. Írjuk fel a  $A = (2, 3, 1)$  és a  $B = (4, 5, -1)$  pontokon átmenő egyenes egyenletét.
2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmege a  $P = (1, 3, 1)$  ponton és irányvektora párhuzamos a  $(1, 0, 1)$  vektorral.
3. Írjuk fel a  $A = (2, 3, 4)$ ,  $B = (4, 5, -1)$  és a  $C = (3, 1, 3)$  pontokon átmenő sík egyenletét.
4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely átmege a  $P = (1, 3, 1)$  ponton és normálvektora párhuzamos a  $(1, 0, 1)$  vektorral.

#### II. Határozzuk meg az alábbi távolságokat.

1. Mekkora a  $(2, 1, 3)$  és a  $(4, 6, -1)$  pont távolsága?
2. Mekkora a  $(-1, 2, 1)$  pont és az  $r(t) = (1, 12, 3) + t(2, -1, 3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  egyenes távolsága?
3. Mekkora a  $(-1, 2, 1)$  pont és a  $2x - 4y + 2z = 1$  sík távolsága?
4. Mekkora az  $\frac{x-1}{5} = 2 - y = z - 1$  és a  $2 - x = y - 5 = z + 1$  egyenesek távolsága?
5. Mekkora az  $r(t) = (1, 1, 3) + t(0, -1, 2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  egyenes és az  $x - 2y + z = 1$  sík távolsága?
6. Mekkora a  $2x - 4y + 2z = 1$  és az  $x - 2y + z = 1$  síkok távolsága?

#### III. Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$ standard bázisában az alábbi lineáris transzformációk mátrixát.

1. Az origón átmenő,  $v \in \mathbb{R}^3$  irányvektorú egyenesre való ortogonális vetítés és tükrözés. (A  $v = (1, -1, 2)$  esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
2. Az origón átmenő,  $n \in \mathbb{R}^3$  normálvektorú síkra való ortogonális vetítés és tükrözés. (Az  $n = (1, -1, 2)$  esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
3. Határozzuk meg a  $(x, y)$  síkbeli  $\varphi \in \mathbb{R}$  szöggel való forgatás mátrixát.
4. Határozzuk meg az  $(1, 1, 0)$  tengely körüli  $\varphi \in \mathbb{R}$  szöggel való forgatás mátrixát.
- 5\* Határozzuk meg az  $n \in \mathbb{R}^3$  tengely körüli  $\varphi \in \mathbb{R}$  szöggel való forgatás mátrixát.

IV. Tekintsünk egy egydimenziós harmonikus rezgőmozgást adott  $D \in \mathbb{R}^+$  (direkciós állandó) és  $m \in \mathbb{R}^+$  (tömeg) paraméterekkel. A koordinátarendszer kezdőpontja legyen a rugó nyugalmi hosszánál. Adott  $t \in \mathbb{R}$  időpillanatban a test helye legyen  $x(t)$  sebessége pedig  $v(t)$ . Ezekből képezzük a  $z(t) = (x(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$  vektort. Mutassuk meg, hogy minden  $t \in \mathbb{R}$  időpillanathoz létezik olyan  $A(t)$  lineáris transzformáció, melyre  $z(t) = A(t)z(0)$  teljesül.

V\*. Tekintsük az alábbi egydimenziós tökéletesen rugalmas ütközéssel kapcsolatos problémát. Egy  $M \in \mathbb{R}^+$  tömegű kiskocsi  $v_0 \in \mathbb{R}^+$  sebességgel közelít a merev fal felé. A kiskocsi és a fal között egy  $m \in ]0, M[$  tömegű test van, mely  $u_0 \in ]-v_0, \infty[$  sebességgel közelít a kiskocsi felé. A feladatban minden ütközést tekintünk teljesen rugalmasnak. A kiskocsi és a test  $n$ -edik ütközése után a kiskocsi sebessége a fal felé legyen  $v_n$ , illetve a test sebessége a fal felé  $u_n$ .

1. Minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén vezessük be a következő mennyiségeket:  $\alpha_n = \sqrt{M}v_n$ ,  $\beta_n = \sqrt{m}u_n$  és  $w_n = (\alpha_n, \beta_n)$ . Mutassuk meg, hogy az ütközés ekkor a  $w_{n+1} = Bw_n$  alakba írható, ahol

$$B = \frac{1}{M+m} \begin{pmatrix} M-m & -2\sqrt{mM} \\ 2\sqrt{mM} & M-m \end{pmatrix}.$$

2. Igazoljuk, hogy ha  $\varphi = \arccos\left(\frac{M-m}{M+m}\right)$ , akkor  $B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ .

3. Mutassuk meg, hogy az ütközések száma  $N = \left\lfloor \frac{1}{\varphi} \left( \pi - \arctg(x) - \arctg\left(x \frac{u_0}{v_0}\right) \right) \right\rfloor + 1$ , ahol

$$x = \sqrt{\frac{m}{M}}, \text{ ahol } [\cdot] \text{ az egészrész függvény.}$$

4. Figyeljük meg, hogy az  $u_0 = 0$  esetben az ütközések száma nem függ a kiskocsi  $v_0$  sebességétől! Próbáljuk dimenzióanalízissel megmagyarázni ezt a jelenséget. Mélyebb ismeretekkel az is megmutatható, hogy az  $u_0 = 0$  esetben az ütközések száma (kis  $x$  értékek esetén)

$$N = \left[ \frac{\pi}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{45}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \right].$$

Ha a fallal vett ütközések számoljuk, akkor kis  $x$  értékek esetén az összes ütközések száma

$$N^* \approx \frac{\pi}{x}.$$

Speciális  $x$  értékek mellett az összes ütközések száma numerikus számítások szerint az alábbi.

$x$	$N^*$
$10^0$	3
$10^{-1}$	31
$10^{-2}$	314
$10^{-3}$	3141
$10^{-4}$	31415
$10^{-5}$	314159