

Számítási módszerek a fizikában 1, 6. hét

Lineáris alterek, elemi mátrixműveletek és lineáris transzformációk mátrixa

I. Lineáris alterek.

1. Az $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ függvénytérben alteret alkotnak-e a következő halmazok?

- $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$
- $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
- $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) \leq 0\}$

2. A valós sorozatok $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ terében alteret alkotnak-e az alábbi halmazok?

- $\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a_1 = 2a_3 + 3a_5\}$
- $\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a_2 = a_4 a_5\}$
- $\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1\}$
- $\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a \text{ számtani sorozat}\}$

II. Lineáris függetlenség.

- Ha u és v lineárisan független vektorok, akkor milyen α és β paraméterek esetén lesznek az $\alpha u + \beta v$, $u + v$ vektorok lineárisan függetlenek?
- Igaz-e, hogy ha az u_1, u_2, \dots, u_{10} vektorok közül bármely 9 vektor lineárisan független, akkor mind a 10 is lineárisan független?
- Hány lineárisan független vektor van a

$$v_1 = (1, 1, 1, 1) \quad v_2 = (2, 2, 1, 4) \quad v_3 = (1, -1, 1, -1) \quad v_4 = (2, 1, 1, 3)$$

vektorok között?

- Az $\{a + b \cos(x) + c \cos^2(x) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ térben bázist alkotnak-e az $1 + \cos(x)$, $\cos(x) + \cos^2(x)$ és $\cos(2x)$ vektorok?

III. Mátrixhatványok.

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok k -adik ($k \in \mathbb{N}$) hatványát.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

2. Egy A mátrix esetén legyen

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Számítsuk ki az e^A mátrixot, ha az A mátrix a következő alakú, valamilyen $t \in \mathbb{R}$ valósra.

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV. Legyen $b \in \mathbb{R}^3$ rögzített vektor. Mi lesz az \mathbb{R}^3 tér standard bázisában a

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad x \mapsto b \times x$$

lineáris leképezés mátrixa?

V*. Legyen $\omega \in \mathbb{R}^3$, $\|\omega\| \leq \pi$ vektor. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az ω vektor által meghatározott tengely körül forgat $\|\omega\|$ szöggel.