

Számítási módszerek a fizikában 1, 7. hét

Skalárszorzos vektorterek és lineáris leképezések rangja

I. Legyen $V = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$, azaz V a $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinomok vektortere, továbbá legyen $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméter.

1. Mutassuk meg, hogy a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (p, q) \mapsto \int_0^\alpha p(x)q(x) dx$$

leképezés skaláris szorzás.

2. Mekkora a $p(x) = x^2 + 1$ és a $q(x) = x^3$ polinomok által bezárt szög a V vektortében?

II. Skaláris szorzás a síkon.

1. Mutassuk meg, hogy a $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren a $p, q \in \mathbb{R}$ paraméterekkel definiált

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 - p x_1 y_2 - q x_2 y_1$$

leképezés pontosan akkor skaláris szorzás, ha $p = q \in]-1, 1[$ teljesül.

2. Legyen $p \in]-1, 1[$ paraméter és

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 - p x_1 y_2 - p x_2 y_1.$$

Mely p értékek esetén lesz az $(1, 0)$ és az $(1, 1)$ vektorok által bezárt szög 30° , 45° és 60° ?

III. Adjuk meg az alábbi skalárszorzos vektorterekben a kezdeti vektorok Gram–Schmidt ortogonalizáltját!

1. A vektortér az \mathbb{R}^3 a megszokott skaláris szorzással, a kezdeti vektorok $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 2, -1)$ és $v_3 = (3, 2, 1)$.

2. A vektortér a legfeljebb másodfokú polinomok tere, két vektor skaláris szorzata $\langle p, q \rangle = \int_0^1 (pq)$, a kezdeti vektorok $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ és $p_3(x) = x^2$.

IV. Legyen az $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az A magterét, képterét és rangját.

V. Mely $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén lesz az alábbi mátrixok rangja 1, 2, illetve 3?

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 4 & a & b \\ 3a & b+3 & 0 \end{pmatrix}$$