Számítási módszerek a fizikában 1, 9. hét

Báziscsere transzformáció

I. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és jelölje $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú valós polinomok vektorterét. Tekintsük az alábbi $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ leképezéseket.

$$\begin{aligned} A &: p(x) \mapsto p(x+1) \\ B &: p(x) \mapsto xp'(x) \\ C &: p(x) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(x \cdot p(x)\right) \end{aligned}$$

1. Az $n = 2$ esetben írjuk fel a fenti leképezések mátrixát az $e_k(x) = x^{k-1}$ $(k = 1, \dots n+1)$ bázisban.
2. Határozzuk meg ezen mátrixok nyomát és determinánsát.
3. Mit mondhatunk a $C - B$ lineáris leképezésről?

II. Az $\mathbb{R}^2$ térben tekitsük az $f_1 = (1,1)$ és az $f_2 = (2,-1)$ vektorokból álló f bázis. Mi lesz az x (első koordináta-) tengelyre való tükrözés mátrixa az $f - f$ bázisban?

III. A V vektorteret az $\mathcal{A}$ koordinátarendszerben az $(e_i)_{i\in I}$ bázisvektorokkal koordinátázzuk a $\mathcal{B}$ koordinátarendszerben pedig az $(f_i)_{i\in I}$ bázisvektorokkal. Amennyiben a T lineáris leképzést a $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}$ mátrixszal reprezentáljuk az $\mathcal{A}$ koordinátarendszerben határozzuk meg T mátrixát $\mathcal{B}$ koordinátarendszerben az alábbi esetekben.

1. $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (1,2)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (1,-1)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
3. $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (2,2,1)$, $f_3 = (1,2,4)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

A fenti példák alapján fogalmazzuk meg precízen és igazoljuk *a determináns és a nyom bázisfüggetlen* kijelentést.

IV*. A $V = \mathbb{R} \times \mathrm{i} \cdot \mathbb{R}$ vektortérben vegyük a kanonikus bázist, és ebben a bázisban írjuk fel annak a lineáris leképezésnek megfelelő mátrixot, mely α szöggel forgat az origó kőrül. Írjuk fel az $\mathrm{i}\,\alpha$ szöggel való forgatás $A(\alpha)$ mátrixát és igazoljuk, hogy

$$A(\alpha) : \mathbb{R} \times \mathrm{i} \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathrm{i} \cdot \mathbb{R} \qquad (x, \mathrm{i} \cdot y) \mapsto \big(x \operatorname{ch}\alpha - y \operatorname{sh}\alpha, \mathrm{i} \cdot (-x \operatorname{sh}\alpha + y \operatorname{ch}\alpha)\big)$$

teljesül. Legyen c pozitív valós paraméter és

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathrm{i} \cdot \mathbb{R} \qquad (x,t) \mapsto (x, \mathrm{i}\, ct)$$

leképezés. Számoljuk ki az

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto (\phi^{-1} \circ A(\alpha) \circ \phi)(x,y)$$

lineáris leképezés mátrixát! Igazoljuk, hogy $|v| < c$ valós paraméter esetén, ha $\alpha = \operatorname{arth}(v/c)$, akkor

$$L(v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,t) \mapsto \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{t - x\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Igazoljuk, hogy ha $L(v_1) \circ L(v_2) = L(v_3)$ és $L(u_1) \circ L(u_2) \circ L(u_3) = L(u_4)$ akkor

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \qquad u_4 = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{1 + \frac{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1}{c^2}} + \frac{u_1 u_2 u_3}{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1}$$

teljesül!