# Számítási módszerek a fizikában 1, 14. hét

## Mátrixcsoportok és perturbációszámítás

I. Az $\mathbb{R}^n$ euklidészi térben minden $\mathcal{O}$ $n \times n$-es ortogonális mátrix és $a \in \mathbb{R}^n$ esetén tekintsük az

$$\varphi_{\mathcal{O},a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto \mathcal{O}x + a$$

transzformációt.

1. Mutassuk meg, hogy az $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha(x) = (x, 1)$ leképezés segítségével $\varphi_{\mathcal{O},a}$ hatása az alábbi módon is felírható.

$$x \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{O} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}x + a \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathcal{O}x + a$$

2. Adott $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ortogonális mátrixok és $a_1, a_2$ vektorok esetén, mely $\mathcal{O}$ mátrixra és $a$ vektorra fog teljesülni az $\varphi_{\mathcal{O}_2,a_2}\varphi_{\mathcal{O}_1,a_1} = \varphi_{\mathcal{O},a}$ egyenlőség?
3. Adott $\mathcal{O}$ ortogonális mátrix és $a$ vektor esetén mi lesz $\varphi^{-1}_{\mathcal{O},a}$?

II. Tekintsük az alábbi mátrixokat

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

melyek közül az utolsó hármat *Pauli-mátrixok*nak nevezik és a

$$\mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \sum_{k=1}^{3} x_k \sigma_k$$

leképezést, melynek értékét az $x \in \mathbb{R}^3$ vektoron $x \cdot \sigma$ jelöli.

1. Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\begin{aligned} (x \cdot \sigma)\,(y \cdot \sigma) &= \langle x, y \rangle\, \sigma_0 + \mathrm{i}(x \times y) \cdot \sigma \\ [(x \cdot \sigma)\,, (y \cdot \sigma)] &= 2\,\langle x, y \rangle\, \sigma_0 \end{aligned}$$

   teljesül, ahol $[A, B] = AB - BA$.
2. Mutassuk meg, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^3$ esetén az $t\sigma_0 + x \cdot \sigma$ mátrix determinánsa $t^2 - \langle x, x \rangle$.

III* Jelölje SO(3) a $3 \times 3$-as valós ortogonális egységnyi determinánsú mátrixok halmazát, továbbá vezessük be a $G = \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ jelölést. Minden $(R, v, a, \tau) \in G$ esetén legyen

$$\varphi_{R,v,a,\tau} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \qquad (x, t) \mapsto (Rx + tv + a, t + \tau).$$

1. Gondoljuk meg, hogy a tér $(x)$ és az idő $(t)$ koordináták milyen transzformációját modellezi a fenti leképezés.
2. Mutassuk meg, hogy az $\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\alpha(x, t) = (x, t, 1)$ leképezés segítségével $\varphi_{R,v,a,\tau}$ hatása az alábbi módon is felírható.

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R & v & a \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rx + tv + a \\ t + \tau \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \begin{pmatrix} Rx + tv + a \\ t + \tau \end{pmatrix}$$

3. Adott $(R_1, v_1, a_1, \tau_1), (R_2, v_2, a_2, \tau_2) \in G$ elemek esetén, mely $(R, v, a, \tau) \in G$ elemre fog teljesülni az $\varphi_{R_2,v_2,a_2,\tau_2}\varphi_{R_1,v_1,a_1,\tau_1} = \varphi_{R,v,a,\tau}$ egyenlőség?
4. Adott $(R, v, a, \tau) \in G$ esetén mi lesz $\varphi^{-1}_{R,v,a,\tau}$?

A fenti $G$ halmazt az utolsó feladatokban kiszámolt szorzás és inverz képzéssel *Galilei-csoport*nak nevezzük.

IV*. Az $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékei és normált sajátvektorai az alábbiak.

$$E_1^{(0)} = 2 \qquad v_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$$
$$E_2^{(0)} = 3 \qquad v_2^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$$
$$E_3^{(0)} = 6 \qquad v_3^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$$

Legyen $V = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{R}$ paraméter és tekintsük az $A' = A + V$ mátrixot.

1. Igazoljuk, hogy a perturbációszámítás első rendjében a sajátértékek az alábbi járulékot kapják.
$$E_1^{(1)} = -a \qquad E_2^{(1)} = 0 \qquad E_3^{(1)} = a.$$
2. Igazoljuk, hogy a $B_{ij} = \left\langle v_i^0, V v_j^{(0)} \right\rangle$ elemekből $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ álló mátrix az alábbi.
$$B = \frac{a}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 0 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$
3. Igazoljuk, hogy a
$$\rho_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha,} \quad i = j; \\ \dfrac{B_{ij}}{E_i^{(0)} - E_j^{(0)}}, & \text{ha,} \quad i \neq j; \end{cases}$$
mátrix az alábbi.
$$\rho = \frac{a}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$
4. Igazoljuk, hogy a perturbációszámítás első rendjében a sajátvektorok az alábbi járulékot kapják.
$$v_1^{(1)} = \frac{\sqrt{2}a}{8}(-1, -1, 2) \qquad v_2^{(1)} = \frac{\sqrt{3}a}{9}(2, -1, 1) \qquad v_3^{(1)} = \frac{\sqrt{6}a}{72}(7, 1, 4)$$
5. Mutassuk meg, hogy a
$$w_i = A'(v_i^{(0)} + v_i^{(1)}) - (E_i^{(0)} + E_i^{(1)})(v_i^{(0)} + v_i^{(1)}) \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$
vektorok az alábbiak.
$$w_1 = \frac{\sqrt{2}a^2}{8}(0, -2, 1) \qquad w_2 = \frac{2\sqrt{3}a^2}{9}(0, 1, 1) \qquad w_3 = \frac{\sqrt{6}a^2}{72}(-10, 6, 11)$$