Számítási módszerek a fizikában 1.
2. zh., avagy Fikusz Algebrikusz kalandjai
2023. 11. 27. 14.15-15.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:
/15	/6	/8	/10	/4x4	

1. Fikusz Algebrikusz, a híresen kiváncsi manó, régi papírok között rábukkant a $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ? \\ ? & 4 & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$ képletre, ahol a kérdőjel helyén álló számokat sajnos már nem tudta kisilabizálni. A képlet környékén lévő szövegeket tanulmányozva megtudta, hogy a mátrix csak valós számokat tartalmaz, a nyoma 2, önadjungált, $D_{13} > 0$, továbbá a 0 és 6 sajátértéke a mátrixnak. Segítsünk Fikusz Algebrikusznak rekonstruálni a mátrix hiányzó elemeit, amennyiben ez lehetséges!

2. A $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixot nézegetve Fikusz Algebrikusz rájött, hogy ez bizonyára a $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren egy $T : V \to V$ lineáris transzformáció mátrixa, az emberek által kedvelt $\mathcal{A}$ bázisban, ahol a bázisvektorok $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Ám Fikusz Algebrikusz kedvenc bázisa e vektortéren $\mathcal{B}$, ami az $f_1 = (1, 2)$, $f_2 = (2, -1)$ bázisvektorokól áll. Hogyan néz ki a T leképezés mátrixa Fikusz Algebrikusz kedvenc bázisában? Azaz, írjuk fel a T leképezés mátrixát a $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$ bázisban.

3. Egy borongós őszi reggelen, Fikusz Algebrikusz a reggeli sétája közben az alábbi problémán merengett. Ha $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, akkor vajon melyik 3×3-as X mátrixra teljesül az, hogy $CX = XC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$? Ne hagyjuk sokáig töprengeni Algebrikuszt ezen a problémán, áruljuk el neki, hogy melyik ez az X mátrix! (Persze, csak ha van ilyen mátrix.)

4. Fikusz Algebrikusz a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot szándékozik kutyusának (Bugsinak) adni játszani. Bugsi azonban allergiás azon mátrixokra, melyeknek pontosan az egyik sajátértéke negatív. Biztonságosan játszhat-e Bugsi a fenti B mátrixszal?
A B mátrix determinánsának a kiszámolásával válaszoljunk a kérdésre.

5. Fikusz Algebrikusz egyik este otthon számolgatott. Mágikus szögmérőjén kimérte az $\alpha = \frac{\pi}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ szöget, húzott ebbe az irányba egy egységnyi hosszú szakaszt, majd leolvasta a szakasz végpontjának vízszintes koordinátáját. Mennyi volt ez a koordináta?
A kérdés megválaszolásához tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, mátrixot, valamint az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ függvényt.

a.) Határozzuk meg az A mátrix $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sajátértékeit és v_1, v_2, v_3 sajátvektorait.
b.) Adjuk meg a v_i vektor által meghatározott egyenesre való ortogonális vetítés P_i mátrixát az $i = 1, 2, 3$ esetben.
c.) Adjuk meg az A mátrix spektrálfelbontását.
d.) Számoljuk ki az $f(A)$ mátrixot.