Matolcsi Tamás

ANALÍZIS II.
(Vektorok)

Tartalom

V. TENZOROK

VI. PSZEUDO-EUKLIDESZI VEKTORTEREK

VII. OPERÁTOROK SPEKTRÁLIS TULAJDONSÁGAI

VIII. AFFIN TEREK

ELŐSZÓ

A fizikai mennyiségeket szokás skalárokra, vektorokra és tenzorokra osztályozni. Azt mondják, a skalárt egyetlen adat, a nagysága jellemzi; a vektornak a nagyságán kívül iránya is van; a tenzor pedig olyan mennyiség, amelyet még ennél is több adattal lehet csak leírni.

A vektorokat közelebbről úgy határozzák meg, mint „irányított szakaszokat”. Két ilyen irányított szakasz összegét a parallelogramma-szabály szerint értelmezik. Az irányított szakaszok számszorosát pedig nyújtással, zsugorítással, tükrözéssel.

Ez a definíció azonban nem kielégitő. Ugyanis például a gyorsulás is vektormennyiség, értékei azonban korántsem irányított szakaszok. A relativitáselméletben felbukkanó vektorok pedig olyan mennyiségek, amelyeknek nincs nagysága. A kvantummechanika állapotvektorai pedig már semmiféle kapcsolatba sem hozhatók az irányított szakaszokkal.

A legnagyobb baj az, hogy fizikai terünk irányított szakaszai és a velük végzett fenti műveletek nem matematikai fogalmak.

Cálunk az, hogy bevezessük a vektorok matematikai fogalmát, amely visszatükrözi az irányított szakaszok és műveleteik fizikai tulajdonságait. Az irányított szakaszok tehát e vektorok mintájául szolgálnak, és szemléltetik azokat.

A vektorok fogalmán keresztül eljutunk a tenzorokhoz is, pontos matematikai értelmet adva a már kevésbé szemléletes megfelelő fizikai mennyiségeknek.

Könyvünkben $\mathbb{K}$ mindig a valós vagy komplex számok testét jelöli. Bár szinte minden ugyanígy tárgyalható akármely test esetén, a fizikában nincs szükség ennél nagyobb általánosságra, ezért a fogalmak egyszerűbb begyakorolhatósága érdekében maradunk a valós és a komplex számoknál.

I. VEKTORTEREK

1. Vektorterek

1.1. Definíció *A* $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ *hármas* ***vektortér*** *a* $\mathbb{K}$ *fölött, ha*

(i) $\mathbf{V}$ *nem üres halmaz (amelynek elemeit* ***vektoroknak*** *hívjuk);*

(ii) $+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *leképezés, amelyet* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ *formában írunk,* ***összeadásnak*** *hívunk, és a következő tualjdonságokkal rendelkezik:*

A1) minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ *esetén* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ *(az összeadás* kommutatív*),*
A2) minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{V}$ *esetén* $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ *(az összeadás* asszociatív*),*
A3) létezik olyan $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ *(****nullavektor*** *a neve), amelyre minden* $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ *esetén* $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$*,*
A4) minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ *esetén létezik* $-\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ *(az* $\boldsymbol{x}$ ***ellentettje****), amelyre* $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$*;*

(iii) $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *leképezés, amelyet* $(\alpha, \boldsymbol{x}) \mapsto \alpha \cdot \boldsymbol{x}$ *formában írunk,* ***számmal szorzásnak*** *hívunk, és minden* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ *valamint* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *esetén*

P) $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$*,*
MP) $\alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x}) = (\alpha\beta) \cdot \boldsymbol{x}$ *(a számmal szorzás* asszociatív*),*
AP) $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}$ *(a számmal szorzás* disztributív *a számok összeadására nézve),*
PA) $\alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}$ *(a számmal szorzás* disztributív *a vektorok összeadására nézve).*

Az összeadást és a számmal szorzást a vektortér ***műveleteinek*** *nevezzük.*

Meghatározásunk a már ismert sémát követi: A1-A4 és P rögzíti az összeadás illetve a számmal szorzás saját tulajdonságait, ezután következnek a számok műveleteivel való kacsolatuk (MP és AP) majd az egymással való kapcsolatuk (PA) jellemzése.

A matematikában elterjedt szokás szerint a továbbiakban a vektortereket csak egyetlen betűvel, a vektorok halmazával jelöljük, és azt mondjuk, $\mathbf{V}$ vektortér $\mathbb{K}$

fölött, és ezen az iménti definíciót értjük, vagyis a műveleteket ,,odagondoljuk" a jelölt halmaz mellé; továbbá az egyszerűség kedvéért általában a szorzás jelét elhagyjuk, azaz $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ helyett $\alpha\boldsymbol{x}$-et írunk. Ugyancsak szokás szerint, ha a félreértés veszélye nem áll fönn, ugyanazzal a $+$ szimbólummal jelüljük az összeadást a különböző vektorterekben is (mint ahogy már a definícióban is ugyanúgy jelöltük a vektorok és a számok összeadását). A különböző vektorterek nullavektorát is ugyanazzal a $\mathbf{0}$ szimbólummal jelöljük, ha a félreértés elkerülhető. Ha szükséges, indexszel utalunk a vektortérre: $\mathbf{0_V}$.

Mivel megállapodásunk szerint $\mathbb{K}$ csak kétféle lehet, sokszor elhagyjuk a ,,$\mathbb{K}$ fölött" megnevezést, és egyszerűen vektorteret mondunk. Természetesen, ha lényesges, hogy valós vagy komplex számokról van-e szó, kimondjuk a megkülönböztetést; aszerint, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, **komplex** illetve **valós** vektortérről beszélünk.

1.2. Lássunk néhány példát, hogy közelhozzuk a vektortér fogalmát.

(i) $\mathbb{K}$ a testműveletekkel – vagyis a szokásos összeadással és szorzással – vektortér önmaga fölött.

(ii) $\mathbb{K}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) is vektortér $\mathbb{K}$ fölött, ha az összeadást és a számmal szorzást így értelmezzük:

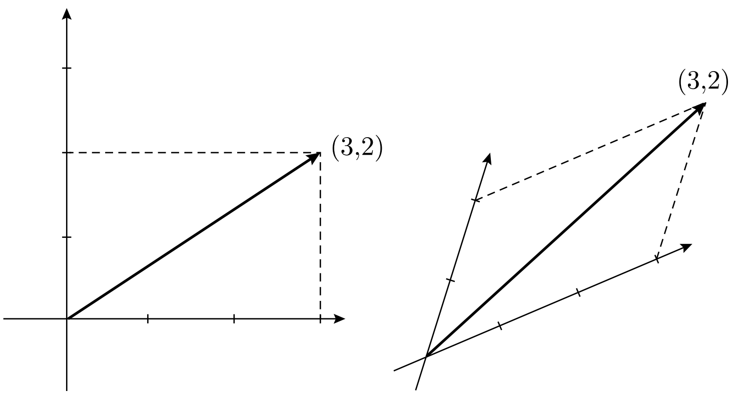
$$(\xi_1, \ldots, \xi_N) + (\eta_1, \ldots, \eta_N) := (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_N + \eta_N),$$

$$\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_N) := (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_N).$$

Itt a nullavektor az a szám N-es, amelynek minden tagja nulla: $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$.

$\mathbb{R}^2$ elemeit, vagyis a valós számpárokat egy sík pontjaival tudjuk szemléltetni, ha síkon két egymást metsző egyenest, azokon egységnyi távolságot jelölünk ki. Kétféle szemléltetést mutat az 1. ábra.

Hasonlóan szemléltethetjük $\mathbb{R}^3$ elemeit a terünk pontjaival, három egymást egy pontban metsző egyenes segítségével. Ezért $\mathbb{R}^2$-t *aritmetikai síknak*, $\mathbb{R}^3$-at *aritmetikai térnek* hívjuk.



1.ábra

(iii) A számértékű sorozatok (az $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ leképezések) összessége, azaz $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ is vektortér a tagonként értelmezett műveletekkel, vagyis ha $\xi, \eta \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, akkor

$$(\xi + \eta)_n := \xi_n + \eta_n,$$

$$(\alpha\xi)_n := \alpha\xi_n$$

minden n pozitív egész számra.

Ugyancsak vektortér a számértékű véges sorozatok összessége,

$$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} := \{\xi : \mathbb{K} \to \mathbb{N} \mid \xi_n = 0 \text{ véges sok } n \text{ kivételével}\},$$

a tagonként értelmezett műveletekkkel.

(iv) Legyen $\mathbf{V}$ vektortér $\mathbb{K}$ fölött, és T nem üres halmaz. Ekkor $\mathbf{V}^T$, vagyis a $T \to \mathbf{V}$ függvények halmaza vektortér a $\mathbb{K}$ fölött a pontonként értelmezett műveletekkel; ha $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}^T$, akkor

$$(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\psi})(t) := \boldsymbol{\phi}(t) + \boldsymbol{\psi}(t),$$

$$(\alpha\boldsymbol{\phi})(t) := \alpha\boldsymbol{\phi}(t)$$

minden $t \in T$ esetén.

Itt a nullavektor az azonosan nulla függvény. Ezt is $\mathbf{0}$-val jelöljük, ha félreértés veszélye nem forog fönn.

(v) Az előbbi példák általánosítása a vektorterek Descartes-szorzata. Legyen I indexhalmaz, és $\mathbf{V}_i$ $(i \in I)$ vektortér $\mathbb{K}$ fölött. Ekkor $\underset{i \in I}{\times} \mathbf{V}_i$ is vektortér az

$$(\boldsymbol{x}_i)_{i\in I} + (\boldsymbol{y}_i)_{i\in I} := (\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{y}_i)_{i\in I},$$

$$\alpha(\boldsymbol{x}_i)_{i\in I} := (\alpha\boldsymbol{x}_i)_{i\in I}$$

műveletekkel.

Itt a nullavektor $(\mathbf{0}_i)_{i\in I}$, ahol $\mathbf{0}_i$ a $\mathbf{V}_i$ nullavektora.

(vi) A valós vagy komplex polinomok halmaza valós illetve komplex vektortér a (iv) szerinti pontonkénti műveletekkel; ugyancsak vektortér a legfeljebb $(N-1)$-ed fokú polinomok összessége $(N \in \mathbb{N})$.

(vii) Egy $K \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett valós vagy komplex értékű
– folytonos,
– differenciálható,
– integrálható

függvények összessége egy-egy valós illetve komplex vektorteret alkot a pontonkénti műveletekkel.

(viii) Van olyan vektortér is, amelynek csak egyetlen eleme van. Legyen ugyanis $\{a\}$ egyelemű halmaz. Az $a+a := a$, $\alpha a := a$ műveletek kielégítik az 1.1. definíció követelményeit, és a a nullavektor. Megállapodásunk szerint bármely vektortér nullavektorát a $\mathbf{0}$ szimbólummal jelöljük, hacsak nem merül fel félreértés. Ennek megfelelően bármely egyelemű vektortérre a $\{\mathbf{0}\}$ jelölést használjuk.

(ix) Jegyezzük meg, hogy minden komplex vektortér egyben valós vektortér is, ha a számmal szorzást leszűkítjük a valós számokra.

Például, ha $\mathbb{C}^N$-en csak valós számmal való szorzást veszünk, olyan valós vektorteret kapunk, amelyet $\mathbb{R}^{2N}$-nel azonosíthatunk (az azonosítás pontos értelmét később tárgyaljuk) azáltal, hogy $\mathbb{C}^N$-nek a $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ elemét úgy tekintjük, mint az $\mathbb{R}^{2N}$-nek a $(\mathrm{Re}\xi_1, \mathrm{Im}\xi_1, \dots, \mathrm{Re}\xi_N, \mathrm{Im}\xi_N)$ elemét.

(x) Az eddigi példák igen fontosak, és lépten-nyomon előfordulnak mind fizikai, mind matematikai alkalmazásokban. A most következő arra lesz igazán jó, hogy egy kicsit mélyebben átérezzük a vektortér definíciójának a lényegét.

Vezeszünk be $\mathbb{R}$-en összeadást és valós számmal való szorzást így:

$$\xi \boldsymbol{+} \eta := \left(\sqrt[3]{\xi} + \sqrt[3]{\eta}\right)^3,$$

$$\alpha \boldsymbol{\cdot} \xi := \alpha^3 \xi.$$

Ezzel $\mathbb{R}$ vektortér önmaga fölött. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a fenti formulában $\boldsymbol{+}$ és $\boldsymbol{\cdot}$ a most definiált vektori műveleteket, $+$ és az egymás mellé írás a szokásos testműveleteket jelöli.

Ez a vektortér nem azonos a standarddal, vagyis azzal, amelyet (i)-ben adtunk meg. Az a tanulság tehát, hogy ugyanazon a halmazon általában többféleképpen lehet műveleteket értelmezni úgy, hogy vektortérhez jussunk. Véssük tehát jól észbe, hogy a vektortér nem csupán halmaz, noha a szokásos jelölésben és szóhasználatban csak a vektorok halmaza jelenik meg, de mindig hozzáértjük a műveleteket is, amelyeket pontosan meg kell határozni.

1.3. Most a vektorok összeadásának és számmal szorzásának az 1.1. definícióból következő legegyszerűbb és minduntalan használt tulajdonságait vesszük számba.

Állítás *(i) Az A3-ban szereplő nullavektor egyértelmű,*
(ii) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ $(\alpha \in \mathbb{K})$,
(iii) $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbf{V})$,
(iv) ha $\alpha\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, *akkor* $\alpha = 0$ *vagy* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,
(v) az A4-ben szereplő $-\boldsymbol{x}$ *egyértelmű és* $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$.
(vi) ha $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ *és* $\alpha\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$, *akkor* $\alpha = \beta$.

Bizonyítás (i) Tegyük fel, hogy létezik $\mathbf{0}$ és $\mathbf{0}'$ nullavektor. Ekkor A3 szerint $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$ és $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$, amiből A1 következtében $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

(ii) A3 szerint $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, tehát PA miatt $\alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0} = \alpha\mathbf{0}$. Adjunk mindkét oldalhoz $-\alpha\mathbf{0}$-t, használjuk fel A2-t, és megkapjuk a kívánt eredményt.

(iii) AP és P alapján $\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} = (1+0)x = \boldsymbol{x}$; mindkét oldalhoz $-\boldsymbol{x}$-et hozzáadva megkapjuk a kívánt eredményt.

(iv) Legyen $\alpha\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, és tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Ekkor MP és az itteni (ii) eredményünk szerint $\mathbf{0} = \dfrac{1}{\alpha}(\alpha\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, ami ellentmondás.

(v) Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{x}'$ és $\boldsymbol{x}''$ olyanok, hogy $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'' = \mathbf{0}$. Ekkor a második egyenlőség mindkét oldalához $\boldsymbol{x}'$-et hozzáadva az első miatt A1 és A2 segítségével azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}''$. Ezt az egyértelmű elemet jelöljük $-\boldsymbol{x}$-szel. Továbbá $\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = (1-1)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, tehát $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

(vi) Ha $\alpha\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$, akkor az eddigiek összevetéséből $(\alpha - \beta)\boldsymbol{x} = 0$, tehát $\boldsymbol{x} \neq 0$ miatt $\alpha - \beta = 0$.

1.4. Az összeadás asszociativitása miatt a zárójelet egymás utáni összeadásoknál elhagyjuk, azaz $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} := (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$. Értelemszerűen ezt a jelölést kiterjesztjük akárhány véges sok vektor összegére is.

Vezessük be az

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} := \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y}) \qquad\qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V})$$

jelölést. Ekkor A2, A1 majd A4 alkalmazásával könnyen megmutathatjuk, hogy

$$\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}.$$

Ezzel a jelöléssel az előző eredmények alapján a vektorok összeadására és kivonására ugyanazok a számolási szabályok érvényesek, mint amiket a számokra jól ismerünk. Például

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}$$

egyenértékűek.

A számmal való szorzásra is a jól ismert szabályok alkalmazhatók. Például, ha $\alpha\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, akkor $\alpha = \beta$; ha $\alpha\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$ és $\alpha \neq 0$, akkor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

1.5. Gyakran használjuk a következő elnevezést: az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektor **párhuzamos**, ha az egyik a másik számszorosa, azaz van olyan α szám, hogy $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$ vagy $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$. A nullavektor bármely vektorral párhuzamos: $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{x}$.

Valós vektorterek esetén a nemnulla párhuzamos vektorokat **egyenlő** (**azonos**) illetve **ellentétes** irányúnak mondjuk aszerint, hogy egymásnak pozitív vagy negatív számszorosai.

A vektorok tulajdonságai csak az 1.1. definícióban szereplő műveletek és az azzal meghatározható fogalmak. A valós vektoroknak az „iránya” tehát értelmes tulajdonság. Vegyük azonban észre azt a nagyon fontos tényt, hogy *a vektoroknak nincs nagysága.* Nem értelmezhetjük az eddigiek alapján, hogy egy vektor milyen nagy, vagy hogy egy vektor nagyobb (hosszabb), mint egy másik. Kivétel valós vektorterek esetén a *párhuzamos* vektorok: ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamosak, nem nullák, akkor azt mondhatjuk, hogy $\boldsymbol{x}$ hosszabb, mint $\boldsymbol{y}$, ha $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$ és $|\alpha| > 1$.

1.6. A $\mathbf{V}$ vektortér H és G részhalmazának a **komplexus-összege** a

$$H + G := \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in H, \boldsymbol{y} \in G\}$$

halmaz. Ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, akkor az $\boldsymbol{x} + G := \{\boldsymbol{x}\} + G$ jelölést használjuk.

Értelemeszerűen hasonlóképp definiáljuk a halmazok $H - G$ komplexus-különbségét.

Ha $A \subset \mathbb{K}$, $H \subset \mathbf{V}$, akkor

$$AH := \{\alpha \boldsymbol{x} \mid \alpha \in A, \boldsymbol{x} \in H\}$$

a két halmaz **komplexus-szorzata**. $\alpha \in \mathbb{K}$ illetve $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén $\alpha H := \{\alpha\}H$, $A\boldsymbol{x} := A\{\boldsymbol{x}\}$.

Általánosíthatjuk a komplexusösszeget akárhány részhalmazra. Legyen I indexhalmaz és H_i $(i \in I)$ a $\mathbf{V}$ vektortér részhalmaza. Ekkor

$$\sum_{i \in I} H_i := \left\{ \sum_{i \in F} \boldsymbol{x}_i \;\middle|\; F \subset I, F \text{ véges }, \boldsymbol{x}_i \in H_i,\, i \in F \right\}.$$

1.7. Feladatok

1. Vegyük rendre azon (ξ_1, ξ_2, ξ_3) elemeket $\mathbb{K}^3$-ból, amelyekre
(i) $\xi_1 = 0$,
(ii) $\xi_1 + \xi_2 = 0$,
(iii) $\xi_1 + \xi_2 = 1$,
(iv) $\xi_1 \xi_2 = \xi_3$.
Vektorteret alkotnak-e ezek a halmazok a $\mathbb{K}^3$-beli összeadással és számmal szorzással?

2. Vegyük rendre azokat a p polinomokat, amelyekre
(i) p harmadfokú,
(ii) $2p(0) = p(1)$,
(iii) $p(t) \geq 0$ ha $t \in [0, 1]$,
(iv) $p(t) = p(1 + t)$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.
Vektorteret alkotnak-e ezek a halmazok a pontonkénti összeadással és szorzással?

3. Adjuk meg a

$$\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1\}, \qquad \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_2 = 3\xi_1\}$$

halmazok komplexus-összegét és komplexus-különbségét.

4. Adjuk meg az előbbi két halmaznak az $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid |\alpha| \leq 1\}$ halmazzal való komplexus-szorzatát.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $H, G \subset \mathbf{V}$ és $A \subset \mathbb{K}$, akkor

$$H + G = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in H} (\boldsymbol{x} + G) = \bigcup_{\boldsymbol{y} \in G} (H + \boldsymbol{y}),$$

$$AH = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha H = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in H} A\boldsymbol{x}.$$

6. Mi a feltétele annak, hogy a $\mathbf{V}$ vektortér H részhalmazára
(i) $H + H \subset H$, (ii) $H + H = H$, (iii) $H + H = H - H$,
(iv) $-H = H$, (v) $H + H = 2H$, (vi) $2H = H$
teljesüljön?

2. Lineáris kombinációk

2.1. Több vektor összegére ugyanúgy használhatjuk a szumma-jelet, mint számok esetében. Közelebbről, ha az F nemüres véges halmaz minden i eleméhez hozzá van rendelve egy $\boldsymbol{x}_i$ vektor a $\mathbf{V}$ vektortérben, akkor ezeknek a vektoroknak az összegét $\sum_{i \in F} \boldsymbol{x}_i$ jelöli. A szumma-jelet olykor üres halmazra is alkalmazzuk; definíció szerint az üres halmazra vett összeg legyen a nullavektor.

Definíció *Legyen F véges halmaz. Az $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{V}$ $(i \in F)$ vektorok* ***lineáris kombinációja*** *egy $\sum_{i \in F} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$ alakú összeg, ahol $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(i \in F)$. A lineáris kombinációkban a vektorok szorzóit* ***együtthatóknak*** *nevezzük.*

2.2. Hangsúlyozzuk, mindig csak véges összeg szerepelhet lineáris kombinációkban (amely lehet egy elemű vagy üres is). Ha egy végtelen halmaz elemeinek lineáris kombinációiról beszélünk, akkor mindig a halmazból vett véges sok elem lineáris kombinációit értjük. Ennek értelmében egy vektortér bármely részhalmaza esetén beszélhetünk a részhalmaz elemeinek összes lehetséges lineáris kombinációjáról, amelyet a következő meghatározásban formalizálunk.

Definíció *Legyen H a $\mathbf{V}$ vektortér részhalmaza; ekkor*

$$\mathrm{Span} H := \{x \in \mathbf{V} \mid \boldsymbol{x} \text{ a } H \text{ elemeinek lineáris kombinációja}\}.$$

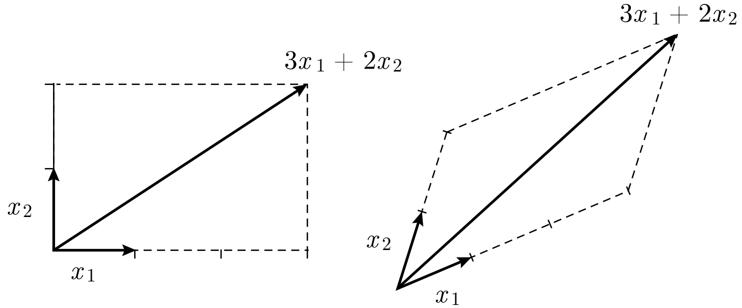
Állítás *Legyen H és G a $\mathbf{V}$ vektortér részhalmaza. Ekkor*
(i) $H \subset \mathrm{Span} H$,
(ii) $\mathrm{Span} H = \mathrm{Span}(\mathrm{Span} H)$,
(iii) ha $H \subset G$, *akkor* $\mathrm{Span} H \subset \mathrm{Span} G$.

Bizonyítás A H elemeinek 1 együtthatós egy tagú lineáris kombinációi maguk a H elemei, tehát világos, hogy (i) fennáll. Ugyancsak nyilvánvalóan igaz (iii) is.

Az eddigiek alapján Span$H \subset$ Span(Span$H$). Legyen $\boldsymbol{x} \in$ Span(Span$H$). Ekkor $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i \in F} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$, ahol F valamely véges halmaz, és $\boldsymbol{x}_i \in$ Span$H$ $(i \in F)$; ez utóbbi viszont azt jelenti, hogy $\boldsymbol{x}_i = \sum\limits_{k \in E_i} \alpha_k^i \boldsymbol{x}_k^i$, ahol E_i valamely véges halmaz, és $\boldsymbol{x}_k^i \in H$ $(k \in E_i, i \in F)$. Ezzel

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in F} \sum_{k \in E_i} \alpha_i \alpha_k^i \boldsymbol{x}_k^i \in \mathrm{Span} H.$$

2.3. A lineáris kombinációk alapvető szerepet játszanak a vektorterek elméletében. Gondoljunk a szemléletes képre, az ,,irányított szakaszokra". A síkban (2.ábra) bármely vektor előállítható két alkalmasan választott vektor lineáris kombinációjaként (vigyázzunk, hogy a szokásos szemléltetésünk ne zavarjon meg: a vektorok merőlegességének nincs értelme; ez majd csak később, az euklideszi struktúra keretein belül válik értelmessé).



2. ábra

A fizikai terünkben három alkalmas vektorról mondhatjuk el ugyanezt. A sík két dimenziós, a tér három dimenziós – ezeknek a kijelentéseknek adunk most pontos értelmet.

Definíció *A* $\mathbf{V}$ *vektortér* H *részhalmazát* ***lineárisan függetlennek*** *nevezzük, ha a* H *különböző elemeinek bármely nem üres lineáris kombinációja csak úgy lehet nulla, ha minden együttható nulla (a nullát csak a* ***triviális*** *lineáris kombinációval lehet előállítani).*

Ellenkező esetben az adott részhalmaz ***lineárisan összefüggő****.*

Jól kezelhető formában ezt így fogalmazhatjuk meg. Legyen I indexhalmaz. A különböző elemekből álló $\{x_i \mid i \in I\}$ halmaz lineárisan független, ha az I bármely nem üres, véges F részhalmazára $\sum\limits_{i \in F} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$ csak úgy teljesülhet, hogy $\alpha_i = 0$ minden $i \in F$ esetén.

Az $\{\boldsymbol{x}_i \mid i \in I\}$ részhalmaz lineárisan összefüggő, ha létezik az I-nek véges részhalmaza és $\{\alpha_i \mid i \in F\}$ számhalmaz, amelynek legalább egy eleme nem nulla, és $\sum\limits_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$.

Ha I véges, akkor nem kell (eleve) véges F részhalmazát vennünk, elég magát az I-t. Ugyanis $\sum\limits_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$, ahol $\alpha_i := 0$, ha $i \in I \setminus F$.

Sokszor másként is fogalmazunk. Például azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektorok lineárisan függetlenek, ahelyett, hogy azt mondanánk, az $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ halmaz lineárisan független.

Az üres halmaz a definíció szerint lineárisan független. Az is világos, hogy nemnulla vektorból álló egy elemű részhalmaz lineárisan független.

Végül megemlítjük azt a nyilvánvaló tényt, hogy ha a $\mathbf{V}$ vektortérnek a H részhalmaza lineárisan független és $G \subset H$, akkor G is lineárisan független.

2.4. Vessünk most egy-egy pillantást az 1.2-ben tárgyalt példákra.

(i) $\mathbb{K}$-ban mint vektortérben bármely két elem párhuzamos egymással, tehát egynél több tagú részhalmaz lineárisan összefüggő.

(ii) $\mathbb{K}^N$-ben az

$$\boldsymbol{e}_1 := (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots \quad , \quad \boldsymbol{e}_N := (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

vektorok lineárisan függetlenek. Valóban, ha

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{e}_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N),$$

akkor $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_N = 0$.

(iii) Teljesen hasonlóan látható be, hogy $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$-ben és $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-ben azok az $\boldsymbol{e}_n$ sorozatok, amelyeknek n-edik tagja 1, a többi nulla, lineárisan függetlenek ($n \in \mathbb{N}$).

(iv) Ha $f, g : T \to \mathbf{V}$ olyanok, hogy $f \neq 0$, és létezik $t_0 \in T$ úgy, hogy $f(t_0) = \mathbf{0}$, $g(t_0) \neq \mathbf{0}$, akkor f és g lineárisan függetlenek.

Valóban, ha $\alpha f + \beta g = \mathbf{0}$, azaz a T minden t elemére $\alpha f(t) + \beta g(t) = 0$, akkor $\beta g(t_0) = 0$, amiből $\beta = 0$; vegyünk egy olyan t-t, amelyre $f(t) \neq 0$, és ezután azt kapjuk, hogy $\alpha = 0$.

Ha $f, g : T \to \mathbf{V}$ olyanok, hogy létezik $t_1, t_2 \in T$ úgy, hogy $\mathbf{0} \neq f(t_1) = g(t_1)$ és $f(t_2) \neq g(t_2)$, akkor f és g lineárisan függetlenek.

Valóban, ha $\alpha f + \beta g = \mathbf{0}$, akkor a t_1-beli tulajdonság miatt $\alpha + \beta = 0$, azaz $\beta = -\alpha$, és így $\alpha f(t_2) - \alpha g(t_2) = 0$ miatt $\alpha = 0$.

(v) Ha H lineárisan független az $\mathbf{U}$ vektortérben és G lineárisan független a $\mathbf{V}$ vektortérben, akkor $\{(\boldsymbol{u}, \mathbf{0}_{\mathbf{V}}), (\mathbf{0}_{\mathbf{U}}, \boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{u} \in H, \boldsymbol{v} \in G\}$ lineárisan független $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$-ben.

(vi) A polinomok vektorterében $\{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ lineárisan független.

Valóban, ha valamely $N \in \mathbb{N}_0$ esetén $\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \mathrm{id}_{\mathbb{K}}^n = 0$, akkor a polinomok jól ismert tulajdonsága szerint $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_N = 0$.

(vii) A $\{\mathbf{0}\}$ vektortérben csak az üres halmaz lineárisan független.

(viii) Legyen $\mathbf{V}$ komplex vektortér, és jelöljük $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$-rel azt a valós vektorteret, amelyet $\mathbf{V}$-ből úgy kapunk, hogy a számmal szorzást leszűkítjük $\mathbb{R}$-re.

Ha H lineárisan független $\mathbf{V}$-ben, akkor lineárisan független $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$-ben is; sőt $\{\boldsymbol{x}, i\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in H\}$ is lineárisan független $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$-ben (ami persze lineárisan összefüggő $\mathbf{V}$-ben).

Ha H lineárisan összefüggő $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$-ben, akkor lineárisan összfüggő $\mathbf{V}$-ben is.

2.5. Folytassuk vizsgálatainkat a lineáris függetlenséggel kapcsolatban. A vektorok H halmaza lineárisan összefüggő, ha

– $\mathbf{0} \in H$,

– létezik $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$ úgy, hogy $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamos.

Valóban, az első esetben a nullát az $1 \cdot \mathbf{0}$ nemtriviális lineáris kombinációval állíthatjuk elő, a második esetben pedig, ha $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$, az $1\boldsymbol{y} - \alpha\boldsymbol{x}$ nemtriviális lineáris kombinációval.

Ezeknek az egyszerű eseteknek az általánosítása és más oldalról vett megfogalmazása a következő

Állítás *Egy vektortér H részhalmaza pontosan akkor lineárisan független, ha minden $\boldsymbol{x} \in H$ esetén $\boldsymbol{x} \notin \mathrm{Span}(H \setminus \{\boldsymbol{x}\})$.*

Bizonyítás Ha H lineárisan összefüggő, akkor van a H-nak olyan különböző vektorokból álló $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ véges részhalmaza és $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ számok, hogy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$. Ekkor például

$$\boldsymbol{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_n} \boldsymbol{x}_i \right) \in \mathrm{Span}(H \setminus \{\boldsymbol{x}_n\}).$$

Ha viszont van olyan $\boldsymbol{x} \in H$, hogy $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Span}(H \setminus \{\boldsymbol{x}\})$, akkor létezik a H-nak egy $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ véges részhalmaza, amely nem tartalmazza $\boldsymbol{x}$-et, és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számok úgy, hogy $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$, azaz $\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$, vagyis a nullát előállítottuk H-beli elemek nemtriviális lineáris kombinációjaként.

2.6. Állítás *Ha a vektorok H halmaza lineárisan független, akkor bármely $\boldsymbol{x} \notin H$ esetén $H \cup \{\boldsymbol{x}\}$ pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Span} H$.*

Bizonyítás . Ha $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Span} H$, akkor az előző állítás szerint $H \cup \{\boldsymbol{x}\}$ lineárisan összefüggő, hiszen $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Span}\big((H \cup \{\boldsymbol{x}\}) \setminus \{\boldsymbol{x}\}\big)$.

Ha $H \cup \{\boldsymbol{x}\}$ lineárisan összefüggő, akkor $\mathbf{0} = \alpha \boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$, ahol $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ a H-nak különböző elemei, és minden $\alpha_i \neq 0$. Ekkor $\alpha \neq 0$, mert különben $\mathbf{0}$ H-beli elemek lineáris kombinációja volna, ami nem lehet, mert H lineárisan független. Ezért

$$\boldsymbol{x} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} \boldsymbol{x}_i \in \mathrm{Span} H.$$

2.7. Állítás *Legyenek H és G egy vektortér lineárisan független részhalmazai, és $H \cap G = \emptyset$. Ekkor*

(i) $H \cup G$ lineárisan független,

(ii) $(\mathrm{Span} H) \cap (\mathrm{Span} G) = \{\mathbf{0}\}$

egyenértékűek.

BIZONYÍTÁS Tegyük föl, (i) teljesül, és az $\boldsymbol{x}$ vektor eleme az (ii) bal oldalának. Ekkor vannak egymástól különböző $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in H$ és $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m \in G$ és alkalmas számok úgy, hogy

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{y}_j.$$

Átrendezve egy oldalra, a nullát előállítjuk $H \cup G$-beli elemek lineáris kombinációjaként, ami csak úgy lehet, ha minden együttható nulla, így $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Tegyük fel, hogy (ii) teljesül, és állítsuk elő a nullát a $H \cup G$ elemeinek lineáris kombinációjaként,

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{y}_j,$$

ahol $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in H$ és $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m \in G$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = -\sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{y}_j;$$

a bal oldal a $\mathrm{Span} H$ eleme, a jobb oldal a $\mathrm{Span} G$ eleme, csak úgy lehetnek egyenlők, ha mindekettő nulla. Ebből viszont már következik a H és G lineáris függetlensége miatt, hogy az összes együttható nulla, azaz $H \cup G$ lineárisan független.

2.8 Állítás *Ha a vektorok H halmaza lineárisan független és R olyan részhalmaz, hogy $H \subset \mathrm{Span} R$, akkor minden $\boldsymbol{h} \in H$ esetén van olyan $\boldsymbol{r} \in R$, hogy $(H \setminus \{\boldsymbol{h}\}) \cup \{\boldsymbol{r}\}$ lineárisan független.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz: létezik $\boldsymbol{h} \in H$ úgy, hogy minden $\boldsymbol{r} \in R$ esetén $(H \setminus \{\boldsymbol{h}\}) \cup \{\boldsymbol{r}\}$ lineárisan összefüggő. Minthogy $H \setminus \{\boldsymbol{h}\}$ lineárisan független, az előző állítás szerint az R minden $\boldsymbol{r}$ elemére $\boldsymbol{r} \in \mathrm{Span}(H \setminus \{\boldsymbol{h}\})$ teljesül, azaz $R \subset \mathrm{Span}(H \setminus \{\boldsymbol{h}\})$, és így $\mathrm{Span}R \subset \mathrm{Span}(H \setminus \{\boldsymbol{h}\})$. Minthogy $H \subset \mathrm{Span}R$, ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{h} \in \mathrm{Span}(H \setminus \{\boldsymbol{h}\})$, ami ellentmondás, lévén H lineárisan független.

2.9. Állítás *Ha a vektorok H véges halmaza lineárisan független és R olyan részhalmaz, hogy $H \subset \mathrm{Span}R$, akkor van az R-nek lineárisan független részhalmaza, amely a H-val azonos számosságú.*

Bizonyítás . Az előbbiek szerint egy tetszőlegesen választott $\boldsymbol{h}_1 \in H$ elemhez létezik $\boldsymbol{r}_1 \in R$ úgy, hogy $H_1 := (H \setminus \{\boldsymbol{h}_1\}) \cup \{\boldsymbol{r}_1\}$ lineárisan független. Világos, hogy $H_1 \subset \mathrm{Span}R$, ezért egy tetszőlegesen választott $\boldsymbol{h}_2 \in H \setminus \{\boldsymbol{h}_1\}$ elemhez van olyan $\boldsymbol{r}_2 \in R$, hogy $H_2 := (H_1 \setminus \{\boldsymbol{h}_2\}) \cup \{\boldsymbol{r}_2\} = (H \setminus \{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2\}) \cup \{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$, amely szintén része $\mathrm{Span}R$-nek, lineárisan fügetlen. Speciálisan $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$ is lineárisan független. Folytatva az eljárást, ha H számossága n, azt kapjuk, hogy van az R-nek $\{\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n\}$ lineárisan független részhalmaza.

2.10. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^3$-ban $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ és $(1,1,1)$ lineárisan összefüggők, de közülük bármelyik három lineárisan független.

2. Milyen ξ komplex számra lesznek $(1+\xi, i-\xi)$ és $(1-\xi, i+\xi)$ lineárisan összefüggők $\mathbb{C}^2$-ben?

3. Milyen ξ valós számra lesznek $(\xi, 1, 0)$, $(1, \xi, 1))$ és $(0, 1, \xi)$ lineárisan összefüggők $\mathbb{R}^3$-ban?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ lineárisan független vektorok, akkor $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}$ is lineárisan függetlenek.

5. Legyenek $x_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ lineárisan független vektorok. Igazoljuk, hogy bármely $\alpha_2, \dots \alpha_n$ szám esetén $\{\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{x}_1 \mid k = 2, \dots, n\}$ lineárisan független.

6. Bizonyítsuk be, hogy bármely nem üres $H, G \subset \mathbf{V}$ esetén

(i) $\mathrm{Span}(H \cup G) = \mathrm{Span}(H + G) = \mathrm{Span}H + \mathrm{Span}G$,

(ii) $\mathrm{Span}(H \cap G) \subset \mathrm{Span}H \cap \mathrm{Span}G$.

Általánosítsuk ezeket a részhalmazok H_i $(i \in I)$ rendszerére.

7. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} = \mathbb{K}\boldsymbol{x} + \mathbb{K}\boldsymbol{y}$.

3. Bázisok

3.1. Definíció *A* $\mathbf{V}$ *vektortér* B *részhalmazát* **bázisnak** *nevezzük, ha*

(i) B *lineárisan független,*

(ii) $\mathbf{V} = \mathrm{Span}B$.

Más szóval, a $\{\boldsymbol{v}_i \mid i \in I\}$ lineárisan független halmaz bázis, ha minden $\boldsymbol{x}$ vektorhoz létezik az I-nek F véges részhalmaza és α_i $(i \in F)$ számok úgy, hogy $\boldsymbol{x} = \sum_{i \in F} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$.

Állítás *A nemnulla* $\boldsymbol{x}$ *vektorhoz a* $\{\boldsymbol{v}_i \mid i \in I\}$ *bázis esetén egyértelműen meg van határozva az* I *véges* F *részhalmaza és* $\alpha_i \in \mathbb{K}$ *úgy, hogy* $\alpha_i \neq 0$ $(i \in F)$ *és* $\boldsymbol{x} = \sum_{i \in F} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$.

Bizonyítás Tudjuk, hogy van a fenti tulajdonságú F részhalmaz és $\alpha_i \neq 0$ $(i \in F)$ számok. Tegyük fel, hogy van az I-nek egy másik E véges részhalmaza és $\beta_j \neq 0$ $(j \in E)$ számok úgy, hogy

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in F} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{j \in E} \beta_j \boldsymbol{v}_j.$$

Ekkor

$$\sum_{i \in F \setminus E} \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{k \in F \cap E} (\alpha_k - \beta_k) \boldsymbol{v}_k - \sum_{j \in E \setminus F} \beta_j \boldsymbol{v}_j = 0,$$

amiből a lineáris függetlenség miatt $\alpha_i = 0$ $(i \in F \setminus E)$, $\alpha_k - \beta_k = 0$ $(k \in F \cap E)$, $\beta_j = 0$ $(j \in E \setminus F)$, mi csak úgy lehet – lévén az együtthatók nem nullák –, hogy $F = E$ és $\alpha_k = \beta_k$ $(k \in E = F)$. ■

Egy kicsit átfogalmazhatjuk az eredményünket: a $\mathbf{V}$ minden eleméhez egyértelműen léteznek α_i $(i \in I)$ számok, úgy, hogy a számok közül csak véges sok nem nulla, és

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in I} \alpha_i \boldsymbol{v}_i.$$

Az összeg, noha formailag esetleg végtelen, értelmes, ha akárhány sok nulla összegét is nullának definiáljuk. Az α_i számok neve: a **vektornak az adott bázisra vonatkozó koordinátái**.

3.2. Vegyük észre azt az egyszerű tényt (a 2.6. alapján), hogy ha L és K lineárisan független halmazok, és L valódi részhalmaza K-nak, akkor L nem lehet bázis.

A következő állítás bizonyítása pedig azt mondja, hogy – megfelelő értelemben – maximális lineárisan független halmaz bázis.

1. Állítás *Bármely vektortérben van bázis.*

BIZONYÍTÁS Legyen $\mathcal{C}$ a $\mathbf{V}$ vektortér lineárisan független halmazainak összessége. Ez nem üres, mert az üres halmazt tartalmazza. Vezessünk be $\mathcal{C}$-n rendezést a halmazelméleti tartalmazással. Könnyű látni, hogy bármely $\mathcal{C}$-beli láncnak a halmazelméleti uniója lineárisan független. Így az unió a lánc felső korlátja $\mathcal{C}$-ben; Zorn lemmája szerint tehát van maximális elem $\mathcal{C}$-ben, mondjuk B. Az ilyen maximális lineárisan független B bázis, mert ha nem volna az, akkor létezne $\boldsymbol{x} \notin \mathrm{Span}B$, és a 2.6. állítás szerint $B \cup \{\boldsymbol{x}\}$ lineárisan független volna, ami ellentmond B maximális voltának. ■

A $\{\mathbf{0}\}$ vektortérben az üres halmaz a bázis.

2. Állítás *Ha L lineárisan független halmaz a $\mathbf{V}$ vektortérben, akkor van olyan bázisa $\mathbf{V}$-nek, amely tartalmazza L-et (szokásos szóhasználattal: L kiegészíthető bázissá).*

BIZONYÍTÁS Legyen $\mathcal{C}_L$ az L-et tartalmazó lineárisan független halmazok összessége, és érveljünk ugyanúgy, mint az előbb.

3.3. Állítás *Ha egy vektortérnek van véges sok elemből álló bázisa, akkor bármely bázisa ugyanannyi elemű.*

BIZONYÍTÁS Zárjuk ki a $\{\mathbf{0}\}$ vektortér triviális esetét. Legyen A és B bázis, és tegyük fel, hogy A elemeinek a száma $N \in \mathbb{N}$, a B elemeinek a száma $M \in \mathbb{N}$. Ekkor $A \subset \mathrm{Span}B$ miatt a 2.9. állítás szerint $N \leq M$; ugyanakkor $B \subset \mathrm{Span}A$ miatt $M \leq N$.

Definíció *Egy vektorér **véges dimenziós**, ha van véges számosságú bázisa; az ellenkező esetben **végtelen dimenziós**. A véges dimenziós vektortér **dimenziója** a tetszőleges bázisának számossága (mint természetes szám). A végtelen dimenziós vektortér dimenziója **végtelen** (a kibővített valós számok plusz végtelenje).*

A $\mathbf{V}$ vektortér dimenziójának a jelölésére a $\dim\mathbf{V}$ szimbólumot használjuk. A dimenziókra a végtelennel kibővített valós számok műveleteit alkalmazzuk, tehát például $\dim\mathbf{V} + \dim\mathbf{U}$ így értendő.

Bebizonyítható, hogy bármilyen vektortér két bázisa azonos számosságú. Így a végtelen dimenziós vektorterek dimenziójában is különbséget tehetnénk a bázisok számossága szerint. Ennek azonban a fizikai alkalmazások szempontjából nincs jelentősége, ezért nem foglalkozunk vele.

3.4. (i) $\mathbb{K}^N$ N dimenziós: a 2.4. (ii)-ben megadott $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N$ vektorok bázist alkotnak. Ezt a $\mathbb{K}^N$ **standard** bázisának hívjuk.

(ii) A polinomok vektorterében $\{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ bázis, tehát ez végtelen dimenziós. Ugyanakkor a legfeljebb $(N-1)$-ed fokú polinomok vektortere N dimenziós.

(iii) $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-ben a 2.4. (iii)-ben megadott $\boldsymbol{e}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ vektorok bázist alkotnak. Viszont $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$-ben ez nem bázis, mert például az azonosan 1 sorozat nem állítható elő lineáris kombinációjukként.

(iv) Ha A és B bázis az $\mathbf{U}$ illetve a $\mathbf{V}$ vektortérben, akkor $\{(\boldsymbol{u}, \mathbf{0}_{\mathbf{V}}), (\mathbf{0}_{\mathbf{U}}, \boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{u} \in A, \boldsymbol{v} \in B\}$ bázis $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$-ben. Következésképpen $\dim(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \dim\mathbf{U} + \dim\mathbf{V}$.

(v) A $\{\mathbf{0}\}$ vektortérben az üres halmaz bázis, tehát ez nulla dimenziós.

(vi) Ha B bázis a komplex $\mathbf{V}$ vektortérben, akkor $\{\boldsymbol{v}, i\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in B\}$ bázis $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$-ben.

3.5. Legyen $\mathbf{A}$ egy dimenziós vektortér. Ekkor bármely nem nulla elem bázis. Ha tehát $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$, akkor minden $\boldsymbol{b} \in \mathbf{A}$ esetén egyértelműen létezik a $\mathbb{K}$-nak $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$-val jelölt eleme, amellyel

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}.$$

Vegyük észre, hogy ha $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}}.$$

Egy dimenziós vektortéren a számmal szorzás meghatározza az összeadást, vagyis bármely összeget kifejezhetünk a szorzáson keresztül. Valóban, ha $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{A}$, akkor

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = \left(1 + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right)\boldsymbol{a}.$$

Másszóval, ha $\mathbf{A}$ valamely nem üres halmaz, és adott egy $\mathbb{K} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, $(\alpha, \boldsymbol{a}) \mapsto \alpha\boldsymbol{a}$ leképezés, amelyre létezik $\mathbf{0} \in \mathbf{A}$ úgy, hogy minden $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$ esetén

(i) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, (ii) $0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, (iii) $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$),

(iv) $\mathbb{K} \to \mathbf{A}$, $\alpha \mapsto \alpha\boldsymbol{a}$ bijekció ha $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$,

akkor $\mathbf{A}$ ellátva az adott leképezéssel mint számmal szorzással, és tetszőleges $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a}$ esetén az

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}, \quad (\alpha\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{a}) \mapsto (\alpha + \beta)\boldsymbol{a}$$

összeadással, amely független $\boldsymbol{a}$-tól, egy dimenziós vektortér lesz.

3.6. Feladatok

1. Egészítsük ki két különböző módon az $(1, i, 0, 0)$ és $(0, 0, 1, i)$ elemekből álló halmazt bázissá $\mathbb{C}^4$-ben.

2. Adjunk meg két bázist $\mathbb{C}^4$-ben úgy, hogy ne legyen közös elemük.

3. Legyen H az a részhalmaza $\mathbb{R}^4$-nek, amelynek elemei olyanok, hogy két koordinátájuk 0, két koordinátájuk 1. Válasszuk ki a H-nak két maximális lineárisan független részhalmazát.

4. Mutassuk meg, hogy 3.5-nek megfelelően az 1.2. (x)-beli példában a számmal szorzásból az adott összeadás következik.

4. Alterek

4.1. Definíció *A* $\mathbf{V}$ *vektortér nem üres* $\mathbf{M}$ *részhalmazát* ***lineáris altérnek*** *nevezzük, ha*

(i) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$, *akkor* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$,
(ii) $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, *akkor* $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$.

A definíció nyilván egyenértékű azzal, hogy ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$, akkor $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ minden $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén, azaz $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \subset \mathbf{M}$.

Állítás *A* $\mathbf{V}$ *vektortér* $\mathbf{M}$ *részhalmaza akkor és csak akkor lineáris altér, ha* $\mathbf{M} = \mathrm{Span}\mathbf{M}$.

Bizonyítás Ha $\mathbf{M} = \mathrm{Span}\mathbf{M}$, akkor $\mathbf{M}$ nyilvánvalóan lineáris altér. Tegyük most föl, hogy $\mathbf{M}$ lineáris altér; azt tudjuk, hogy $\mathbf{M} \subset \mathrm{Span}\mathbf{M}$ (ez minden részhalmazra igaz, nem csak lineáris altérre); azt kell csak megmutatnunk, hogy $\mathrm{Span}\mathbf{M} \subset \mathbf{M}$. Vegyünk az $\mathbf{M}$ elemeiből képezett $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z}$ lineáris kombinációt. Az összeg mindhárom tagja eleme $\mathbf{M}$-nek, ezért $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ is eleme $\mathbf{M}$-nek, így $(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) + \gamma\boldsymbol{z}$ is. Hasonlóképp érvelhetünk akárhány tagú lináris kombináció esetén. ■

A lineáris jelzőt gyakran elhagyjuk és csak altérről beszélünk.

A nullavektor minden altérben benne van, hiszen egy altér az $\boldsymbol{x}$ elemével együtt a $0\boldsymbol{x}$ elemet is tartalmazza.

A nullavektorból álló egy elemű halmaz, és maga $\mathbf{V}$ is altér. Ezeket **triviálisnak** hívjuk. **Valódinak** mondunk egy alteret, amely a $\mathbf{V}$ valódi részhalmaza.

Ha egy $\mathbf{M}$ altérre leszűkítjük a $\mathbf{V}$-beli összeadást és számmal szorzást, akkor $\mathbf{M}$ is vektortér; kérjük az olvasót, igazolja ezt a kijelentést (vagyis hogy teljesülnek az 1.1. definícióban rögzített tulajdonságok $\mathbf{M}$-re). Ennek megfelelően beszélhetünk egy $\mathbf{M}$ altér dimenziójáról.

Valós vektortérben az egy dimenziós altereket **egyeneseknek**, a két dimenziósakat **síkoknak** nevezzük; az olyan alteret a véges N dimenziós vektortérben, amelynek a dimenziója $N-1$, **hipersíknak** hívjuk. Általánosabban ezeket az elnevezéseket használjuk ilyen alterek úgynevezett eltoltjaira is; tehát ha $\boldsymbol{x}$ vektor egy valós vektortérben $\mathbf{M}$ pedig egy illetve két dimenziós altér, akkor $\boldsymbol{x} + \mathbf{M}$ egyenes illetve sík.

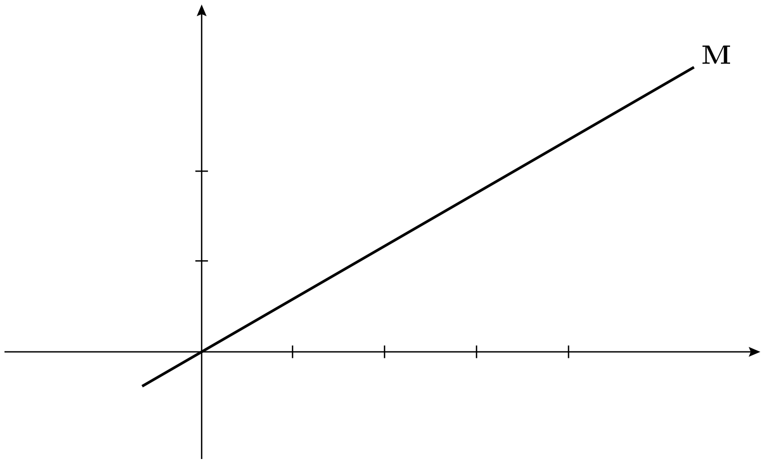
4.2. Lássunk példát alterekre!

(i)

$$\mathbf{M} := \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\xi_1 - 3\xi_2 = 0\} = \{(3\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

egy dimenziós altér $\mathbb{R}^2$-ben (3. ábra)

A geometriai szemléltetésben $\mathbb{R}^2$ nem triviális alterei olyan egyenesek, amelyek átmennek a kezdőponton. Ilyen altér eltoltja általában olyan egyenes, amely nem megy át a kezdőponton.



3. ábra

$\mathbb{R}^3$ nem triviális alterei pedig ilyen szemléltetésben a kezdőponton áthaladó egyenesek és síkok. Például

$$\mathbf{M}_1 := \{(3\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{(egyenes)},$$

$$\mathbf{M}_2 := \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2\xi_1 - 3\xi_2 = 0\} \qquad \text{(sík)}.$$

(ii) Legyen $M, N \in \mathbb{N}$, $M < N$. Ekkor

$$\{(\xi_1, \dots, \xi_M, 0, \dots, 0) \mid \xi_1, \dots, \xi_M \in \mathbb{K}\}$$

a $\mathbb{K}^N$ altere.

(iii) $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ valódi lineáris altere.

(iv) Ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ vektorterek, akkor $\mathbf{U} \times \{\mathbf{0}_\mathbf{V}\}$ és $\{\mathbf{0}_\mathbf{U}\} \times \mathbf{V}$ alterek $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$-ben.

(v) A K intervallumon értelmezett $\mathbb{K}$ értékű folytonos függvények, a differenciálható függvények, az integrálható függvények egy-egy alteret alkotnak a $\mathbb{K}^K$ vektortérben.

(vi) A legfeljebb $(N-1)$-ed fokú polinomok alteret alkotnak a polinomok vektorterében.

(vii) $\boldsymbol{P}_+ :=$ {páros polinomok} és $\boldsymbol{P}_- :=$ {páratlan polinomok} alterek a polinomok vektorterében.

(viii) Legyen $\mathbf{V}$ vektortér, T nem üres halmaz, és S a T valódi nem üres részhalmaza. Ekkor

$$\{\boldsymbol{\phi} : T \to \mathbf{V} \mid \boldsymbol{\phi}(t) = 0 \quad (t \in T \setminus S)\}$$

a $\mathbf{V}^T$ nemtriviális altere. A $\mathbf{V}^S$ vektorteret azonosíthatjuk – majd ennek pontos értelmet adunk, mit jelent – ezzel az altérrel azáltal, hogy az S-en értelmezett függvényeket kiterjesztjük a T-n értelmezett függvényekké úgy, hogy az S-en kívül legyenek nullák.

4.3. Állítás *Egy vektortér lineáris altereinek metszete is lineáris altér.*

Bizonyítás Legyen $\mathbf{M}_i$ $(i \in I)$ altér a $\mathbf{V}$ vekortérben. Mivel a nullavektor minden $\mathbf{M}_i$ eleme, az $\mathbf{M}_i$-k metszete nem üres. Ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ a metszet eleme, akkor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}_i$, és így $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \subset \mathbf{M}_i$ minden $i \in I$ esetén, vagyis $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ része az $\mathbf{M}_i$-k metszetének. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\bigcap_{i \in I} \mathbf{M}_i$ is lineáris altér.

Definíció *A vektorok egy H részhalmazát tartalmazó alterek metszetét a H által* ***kifeszített (generált) lineáris altérnek*** *vagy a H* ***lineáris burkának*** *hívjuk.*

Mivel az egész tér tartalmazza H-t, a lineáris burok nem üres, amely előző állítás szerint lineáris altér; nyilván a legszűkebb, amely tartalmazza H-t.

4.4. Állítás *A H kifeszítette lineáris altér egyenlő* $\mathrm{Span}H$*-val.*

Bizonyítás Jelölje most L_H a H kifeszítette lineáris alteret. A 2.2. állítás (ii) pontja és 4.1. alapján $\mathrm{Span}H$ lineáris altér, amely tartalmazza H-t, tehát $L_H \subset \mathrm{Span}H$. Viszont $H \subset L_H$, így $\mathrm{Span}H \subset \mathrm{Span}L_H = L_H$.

4.5. Állítás *Ha* $\mathbf{M}$ *és* $\mathbf{N}$ *lineáris altér, akkor* $\mathrm{Span}(\mathbf{M} \cup \mathbf{N}) = \mathbf{M} + \mathbf{N}$.

Bizonyítás Egyszerű tény, hogy $\mathbf{M} \cup \mathbf{N} \subset \mathbf{M} + \mathbf{N} \subset \mathrm{Span}(\mathbf{M} \cup \mathbf{N})$, és nyilvánvaló, hogy $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ lineáris altér, tehát $\mathrm{Span}(\mathbf{M} \cup \mathbf{N}) \subset \mathbf{M} + \mathbf{N}$.

4.6. A 3.2.2. állítás következménye, hogy ha $\mathbf{M}$ a $\mathbf{V}$ vektortér altere, akkor az $\mathbf{M}$ bármely A bázisához létezik a $\mathbf{V}$-nek olyan B bázisa, hogy $A \subset B$; közelebbről: $A = B \cap \mathbf{M}$. Ezért $\dim\mathbf{M} \leq \dim\mathbf{V}$, sőt, ha $\mathbf{M}$ a véges dimenziós $\mathbf{V}$ vektortér valódi altere, akkor $\dim\mathbf{M} < \dim\mathbf{V}$.

Ennek alapján könnyű megmutatni, hogy ha $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ alterek, $\dim\mathbf{M} = \dim\mathbf{N} < \infty$ és $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$, akkor $\mathbf{M} = \mathbf{N}$.

Állítás *Ha* $\mathbf{M}$ *és* $\mathbf{N}$ *alterek egy vektortérben, akkor*

$$\dim(\mathbf{M} \cap \mathbf{N}) + \dim(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \dim\mathbf{M} + \dim\mathbf{N},$$

amit szemléletesebben írhatunk, ha az alterek metszete véges dimenziós:

$$\dim(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \dim\mathbf{M} + \dim\mathbf{N} - \dim(\mathbf{M} \cap \mathbf{N}).$$

Bizonyítás Legyen rendre

$$A := \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\},$$

$$B_{\mathbf{M}} := \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1} \ldots, \boldsymbol{v}_m\},$$

$$B_{\mathbf{N}} := \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}'_{r+1} \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$$

az $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ bázisa. Az nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Span}(B_{\mathbf{M}} \cup (B_{\mathbf{N}} \setminus A)) = \mathbf{M} + \mathbf{N}$. Megmutatjuk, hogy $B_{\mathbf{M}} \cup (B_{\mathbf{N}} \setminus A)$ lineárisan független.

Tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{j=r+1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}'_j = \mathbf{0}.$$

A bal oldal második tagja – nevezzük $\boldsymbol{x}$-nek – a $B_{\mathbf{N}} \setminus A$ lineáris burkának eleme. Az első tag, amely $-\boldsymbol{x}$-szel egyenlő, az $\mathbf{M}$ eleme, tehát $\boldsymbol{x}$ is eleme $\mathbf{M}$-nek, azaz $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Span}(A) \cap \mathrm{Span}(B_{\mathbf{N}} \setminus A)$. Alkamazzuk a 2.7. állítást a $H := A$, $G := B_{\mathbf{N}} \setminus A$ szereposztással, és azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, amiből a lineáris függetlenség miatt $\beta_j = 0$ minden j-re és $\alpha_i = 0$ minden i-re.

4.7. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy ha $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ és $\boldsymbol{z}$ ugyanannak a vektortérnek az elemei, és $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ ugyanazt az alteret feszíti ki, mint $\boldsymbol{y}$ és $\boldsymbol{z}$.

2. Legyen $\mathbf{M}$ altér a $\mathbf{V}$ vektortérben és $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{M}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Span}(\mathbf{M} \cup \{\boldsymbol{x}\})$, akkor $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Span}(\mathbf{M} \cup \{\boldsymbol{y}\})$.

3. Hány dimenziós $\mathbb{C}^3$-nak a $\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,\ i\xi_1 + \xi_2 = 0\}$ altere?

4. Legyen $\mathbf{M}_1 \subset \mathbb{R}^4$ az $(1, 0, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 1)$ és $(2, -2, 0, 0)$ vektorok kifeszítette altér, $\mathbf{M}_2 \subset \mathbb{R}^4$ pedig a $(2, -1, 1, 1)$, $(3, -1, 2, 2)$, $(1, -1, 0, 1)$ vektorok kifeszítette altér. Határozzuk meg $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ és $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ dimenzióját!

5. Találjunk $\mathbb{R}^3$-nak olyan két dimenziós $\mathbf{N}$ alterét, hogy $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ egy dimenziós legyen, ahol $\mathbf{M} := \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0\}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy a valós $\mathbf{V}$ vektortér $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ vektorán áthaladó egyenes (vagyis egy egy dimenziós altér eltoltja, amely tartalmazza $\boldsymbol{x}$-et és $\boldsymbol{y}$-t) $\boldsymbol{x} + \mathbb{R}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} + \mathbb{R}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$.

Az egymástól különböző $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ és $\boldsymbol{z}$ vektorokon áthaladó sík $\boldsymbol{x} + \mathbb{R}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \mathbb{R}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x})$.

7. Mutassuk meg, hogy N dimenziós vektortérben két különböző hipersík metszete $N - 2$ dimenziós.

8. Legyenek $\mathbf{M}_i$ $(i \in I)$ alterek egy vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i \in I} \mathbf{M}_i = \mathrm{Span}\left(\bigcup_{i \in I} \mathbf{M}_i\right).$$

9. Állapítsuk meg, hány dimenziós a $[-\pi, \pi]$ intervallumon folytonos függvények vektorterében az $\{1, \sin, \sin^2, \sin\circ(2\mathrm{id}), \cos, \cos^2, \cos\circ(2\mathrm{id})\}$ elemek kifeszítette lineáris altér, és adjuk meg két különböző bázisát. Számoljuk ki a bázisból kimaradó függvények koordinátáit az adott bázisra vonatkozóan.

10. Mi az üres halmaz lineáris burka egy vektortérben?

5. Kiegészítő alterek

5.1. Definíció *A* $\mathbf{V}$ *vektortér* $\mathbf{M}$ *és* $\mathbf{N}$ *alterét (egymást)* ***kiegészítőnek*** *nevezzük, vagy azt mondjuk, hogy* $\mathbf{M}$ *az* $\mathbf{N}$, *illetve* $\mathbf{N}$ *az* $\mathbf{M}$ ***kiegészítője****, ha*

(i) $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \{\mathbf{0}\}$,
(ii) $\mathbf{M} + \mathbf{N} = \mathbf{V}$.

Ahelyett, hogy $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ egymás kiegészítői, azt is szokás mondani, hogy $\mathbf{V}$ az $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ **direkt összege**; jelölésben $\mathbf{V} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$. Ez tehát az iménti definíció (i) és (ii) feltételét együtt jelenti; az (i) tulajdonságról azt mondjuk, hogy $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ **független**, az (ii) tulajdonságról pedig azt, hogy $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ **kifeszíti** $\mathbf{V}$-t.

Állítás *Bármely altérnek létezik kiegészítője.*

Bizonyítás Legyen $\mathbf{M}$ altér, és adjuk meg egy A bázisát. Ekkor a 3.2.2. állítás szerint van a $\mathbf{V}$-nek olyan B bázisa, amelyre $A \subset B$ teljesül. Egyszerű tény, hogy $\mathbf{N} := \mathrm{Span}(B \setminus A)$ az $\mathbf{M}$ kiegészítője. ■

A bizonyításból az is látszik, hogy ha $\mathbf{V} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$, akkor

$$\dim\mathbf{M} + \dim\mathbf{N} = \dim\mathbf{V} (= \dim(\mathbf{M} + \mathbf{N})).$$

5.2. (i) $\{\mathbf{0}\}$ és $\mathbf{V}$ egymás kiegészítői.

(ii) Egy nemtriviális altérnek nagyon sok kiegészítője van. Például egy háromdimenziós vektortér kétdimenziós alterének (síkjának) kiegészítője minden olyan egy dimenziós altér (egyenes), amely nincs benne a síkban. Szokás ezeket az egyeneseket a síkra transzverzálisnak nevezni (vigyázzunk, hogy a szokásos szemléltetésünk ne zavarjon meg: a síkra transzverzális egyenesek egyike sem merőleges a síkra, mert a merőlegességnek nincs értelme; ez majd csak később, az euklideszi struktúra keretein belül válik értelmessé).

(iii) Ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ vektortér, akkor $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$-ben $\mathbf{U} \times \{\mathbf{0}_\mathbf{V}\}$ és $\{\mathbf{0}_\mathbf{U}\} \times \mathbf{V}$ kiegészítő alterek.

(iv) A 4.2.(vii) jelöléseivel $\boldsymbol{P}_+$ és $\boldsymbol{P}_-$ kiegészítő alterek a polinomok vektorterében.

(v) A 4.2.(viii) jelöléseivel és azonosítással $\mathbf{V}^S$ és $\mathbf{V}^{T\setminus S}$ kiegészítő alterek $\mathbf{V}^T$-ben.

5.3. Állítás *A* $\mathbf{V}$ *vektortér* $\mathbf{M}$ *és* $\mathbf{N}$ *lineáris altere pontosan akkor kiegészítők, ha* $\mathbf{V}$ *bármely eleme egyértelműen előállítható egy* $\mathbf{M}$*-beli és egy* $\mathbf{N}$*-beli vektor összegeként.*

Bizonyítás Legyenek $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ kiegészítő alterek. Ekkor $\mathbf{V} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$ miatt a $\mathbf{V}$ bármely $\boldsymbol{x}$ eleméhez létezik $\boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ és $\boldsymbol{z} \in \mathbf{N}$ úgy, hogy $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$. Tegyük föl, hogy valamely $\boldsymbol{y}' \in \mathbf{M}$ és $\boldsymbol{z}' \in \mathbf{N}$ esetén $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}'+\boldsymbol{z}'$. Ekkor $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}$. A bal oldalon $\mathbf{M}$ eleme, a jobb oldalobn $\mathbf{N}$ eleme áll; mivel a két altér metszete a nulla, ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, azaz $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ és $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$: az $\boldsymbol{x}$ ilyen előállítása egyértelmű.

Ha viszont $\mathbf{V}$ minden eleme előáll egyértelműen egy $\mathbf{M}$-beli és egy $\mathbf{N}$-beli vektor összegeként, akkor nyilván $\mathbf{V} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$. Tegyük fel, hogy létezik $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$. Ha $\boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ és $\boldsymbol{z} \in \mathbf{N}$, akkor $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v} \in \mathbf{M}$, $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{v} \in \mathbf{N}$, és $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{v})$, tehát $\boldsymbol{x}$ előállítása nem egyértelmű. Ebből az ellentmondásból következik, hogy $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \{\mathbf{0}\}$.

5.4. Az előbbi fogalmakat és állításokat általánosíthatjuk akárhány altérre.

Definíció *Legyen* I *indexhalmaz. A* $\mathbf{V}$ *vektortér* $\mathbf{M}_i$ $(i \in I)$ *altereinek összessége*

(i) ***független****, ha* $\mathbf{M}_k \cap \left(\sum_{i \in I\setminus\{k\}} \mathbf{M}_i \right) = \{\mathbf{0}\}$ *minden* $k \in I$ *esetén,*

(ii) ***kifeszíti*** $\mathbf{V}$*-t, ha* $\sum_{i \in I} \mathbf{M}_i = \mathbf{V}$.

Ha az (i) és (ii) tulajdonság egyszerre teljesül, akkor ***kiegészítő altérrendszerről*** *beszélünk.*

Természetesen itt is használjuk azt az elnevezést, hogy a vektortér a kiegészítő altérrendszer direkt összege, jelölésben $\mathbf{V} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{M}_i$.

Egyszerűen bizonyíthatók a következő tények.

Állítás *Az* $\{\mathbf{M}_i \mid i \in I\}$ *altérrendszer akkor és csak akkor*

(i) független, ha minden $\{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}_i \in \mathbf{M}_i \mid i \in I\}$ *halmaz lineárisan független,*

(ii) feszíti ki $\mathbf{V}$*-t, ha a* $\mathbf{V}$ *minden eleme előállítható* $\sum_{i \in F} \boldsymbol{x}_i$ *alakban, ahol* F *az* I*-nek véges részhalmaza és* $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}_i \in \mathbf{M}_i$ $(i \in F)$.

Ha az altérrendszer független, akkor a fenti előállításban az $x_i \neq \mathbf{0}$ *vektorok egyértelműek.*

5.5. Feladatok

1. Kiegészítő alterek-e a 4.2. (i)-ben adott $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ alterek?

2. Adjuk meg $\mathbb{C}^4$-ben az $\{(\alpha, \alpha i, \beta, \beta i) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ altér két különböző kiegészítőjét (lásd a 3.6.1. feladatot).

3. Igazoljuk, hogy egy vektortérben a $\{\boldsymbol{v}_i \neq \mathbf{0} \mid i \in I\}$ halmaz pontosan akkor bázis, ha $\{\mathbb{K}\boldsymbol{v}_i \mid i \in I\}$ kiegészítő altérrendszer.

4. Adjuk meg a legfeljebb $(N-1)$-ed fokú polinomok alterének két különböző kiegészítőjét a polinomok vektorterében.

5. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ kiegészítő alterek és $\mathbf{L}$ lineáris altér, akkor $\mathbf{L} = \mathbf{L} \cap \mathbf{M} + \mathbf{L} \cap \mathbf{N}$.

6. Faktorterek

6.1. Eddig a fizikai terünk irányított szakaszait mintázó matematikai fogalmakat és a hozzájuk kapcsolódó legegyszerűbb összefüggéseket tárgyaltuk, amelyek szintén természetesen tükrözik a fizikai terünk bizonyos tulajdonságait (dimenzió, sík, egyenes). Most egy kicsit elvontabb matematikai fogalommal ismerkedünk meg, amely elengedhetetlenül fontos a vektorterek elméletében és alkalmazásaiban.

1. Állítás *Legyen* $\mathbf{M}$ *a* $\mathbf{V}$ *vektortér altere. Ekkor a* $\mathbf{V}$*-n értelmezett következő* $\backsim$ *reláció ekvivalencia:*

$$\boldsymbol{x} \backsim \boldsymbol{y} \qquad \textit{ha} \qquad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbf{M},$$

és az $\boldsymbol{x}$ *ekvivalencia-osztálya* $\boldsymbol{x} + \mathbf{M}$.

Bizonyítás Valóban, a reláció nyilvánvalóan szimmetrikus és reflexív. Tranzitív is: ha $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ és $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} \in \mathbf{M}$, akkor $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) \in \mathbf{M}$.

Továbbá, ugyancsak egyszerű tény, hogy $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$ egyenértékű azzal, hogy $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{x} + \mathbf{M}$. ■

Jelölje az ekvivalencia-osztályok halmazát $\mathbf{V}/\mathbf{M}$.

2. Állítás $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ *az alábbi műveletekkel vektortér:*

$$(\boldsymbol{x} + \mathbf{M}) + (\boldsymbol{y} + \mathbf{M}) := (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \mathbf{M} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}),$$

$$\alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \mathbf{M}) := \alpha\boldsymbol{x} + \mathbf{M} \qquad (\alpha \in \mathbb{K}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}).$$

Bizonyítás Először is azt kell megmutatnunk, hogy ez a meghatározás jó. Előfordulhat ugyanis, hogy $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}'$, de $\boldsymbol{x}+\mathbf{M} = \boldsymbol{x}'+\mathbf{M}$, $\boldsymbol{y}+\mathbf{M} = \boldsymbol{y}'+\mathbf{M}$, tehát a fenti definíció csak akkor helyes, ha ez esetben $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\mathbf{M} = (\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}')+\mathbf{M}$. Ez viszont így van: ugyanis van olyan $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ eleme $\mathbf{M}$-nek, hogy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}$, tehát $(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}')+\mathbf{M} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\mathbf{M} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\mathbf{M}$.

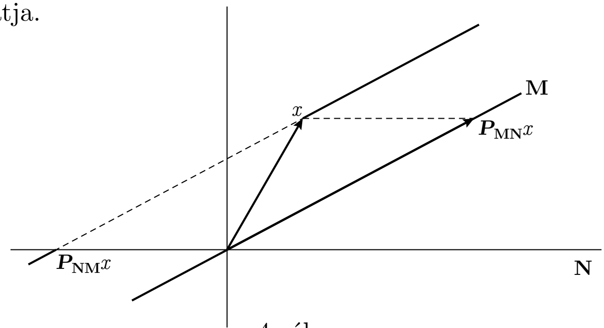
Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy a $+$ összeadás kommutatív és asszociatív. Az $\mathbf{M}$ (vagyis a $\mathbf{0}+\mathbf{M}$) ekvivalencia-osztály az összeadás nulla-eleme – azaz $(\boldsymbol{x}+\mathbf{M})+\mathbf{M} = \boldsymbol{x}+\mathbf{M}$ – és $-(\boldsymbol{x}+\mathbf{M}) := -\boldsymbol{x}+\mathbf{M}$ az $\boldsymbol{x}+\mathbf{M}$ ellentettje. Összefoglalva tehát $+$ kielégíti az 1.1. definícióban felsorolt A1-A4 tulajdonságot.

Ugyancsak az olvasóra hagyjuk, mutassa meg – könnyű –, hogy a $\cdot$ számmal szorzás definíciója jó, és eleget tesz az 1.1. definíció P, MP, AP, és PA tulajdonságainak. ∎

Megjegyezzük, hogy az imént definiált összeadás és számmal szorzás megegyezik a komplexusműveletekkel.

Az adott műveletekkel $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ vektortér; ez $\mathbf{V}$-nek az $\mathbf{M}$ szerinti **faktortere**.

6.2. Szemléletes képet alkothatunk a faktortérről, ha $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ és $\mathbf{M}$ egy dimenziós altér. Ekkor $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ elemei az $\mathbf{M}$-mel párhuzamos egyenesek, és a műveleteket a 4. ábra mutatja.



4. ábra

Hasonlóképpen $\mathbb{R}^3$-nak egy két dimenziós altér szerinti faktortere az altérrel párhuzamos síkok összessége.

6.3. Állítás *Ha A az $\mathbf{M}$ altér bázisa, B a $\mathbf{V}$ olyan bázisa, amely tartalmazza A-t, akkor*

$$\{\boldsymbol{x}+\mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \in B \setminus A\} \qquad (*)$$

a $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ bázisa. Következésképpen

$$\dim\mathbf{M} + \dim(\mathbf{V}/\mathbf{M}) = \dim\mathbf{V},$$

amit szemléletesebb formába írhatunk, ha $\mathbf{M}$ véges dimenziós:

$$\dim(\mathbf{V}/\mathbf{M}) = \dim\mathbf{V} - \dim\mathbf{M}.$$

Bizonyítás Teljesüljön a $B \setminus A$ véges sok $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ elemére $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\boldsymbol{x}_i + \mathbf{M}) = \mathbf{0}\,(= \mathbf{M})$, vagyis a faktortér műveleteinek az értelmezése szerint $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i\right) + \mathbf{M} = \mathbf{0}\,(= \mathbf{M})$. Ez azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \in \mathbf{M}$ (hiszen $\boldsymbol{x} + \mathbf{M} = \mathbf{M}$ pontosan akkor teljesül, ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$). Viszont a bázisok adott tulajdonságai alapján ez csak úgy lehet, hogy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$, amiből $\alpha_i = 0$ minden i-re; tehát $(*)$ lineárisan független halmaz $\mathbf{V}/\mathbf{M}$-ben.

Vegyük ezután a $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ tetszőleges $\boldsymbol{x} + \mathbf{M}$ elemét. Ekkor van a $B = A \cup (B \setminus A)$-nak véges $\{\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_k\} \cup \{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m\}$ részhalmaza, amellyel $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \boldsymbol{y}_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$. Itt az első tag az $\mathbf{M}$ eleme, tehát

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{M} = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}_i\right) + \mathbf{M} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\boldsymbol{x}_i + \mathbf{M}),$$

vagyis a $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ minden eleme a $(*)$-beli vektorok lineáris kombinációja.

Definíció $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ *dimenzióját az M* ***kodimenziójának*** *hívjuk és így jelöljük:* $\mathrm{codim}\mathbf{M} := \dim(\mathbf{V}/\mathbf{M})$. *Bármely* $\mathbf{V}$ *vektortérben az* $\mathbf{M}$ *alteret* ***hipersíknak*** *nevezzzük, ha* $\mathrm{codim}\mathbf{M} = 1$.

Az előző állítás második részét az imént bevezetett jelöléssel

$$\dim\mathbf{M} + \mathrm{codim}\mathbf{M} = \dim\mathbf{V}$$

alakba is írhatjuk.

Érdemes megjegyezni, hogy $\mathbf{M}$ bármely kiegészítő alterének a dimenziója megegyezik $\mathbf{M}$ kodimenziójával.

Felhívjuk a figyelmet arra, előfordulhat, hogy $\mathbf{V}$ és $\mathbf{M}$ végtelen dimenziós, de $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ véges dimenziós. Viszont ha $\mathbf{V}$ végtelen dimenziós és $\mathbf{M}$ véges dimenziós, akkor $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ is végtelen dimenziós.

6.4. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{V}/\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$ és $\mathbf{V}/\{\mathbf{0}\} = \mathbf{V}$.

2. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{N}$ az $\mathbf{M}$ kiegészítő altere, akkor $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ minden elemében (ekvivalencia-osztályban) pontosan egy $\mathbf{N}$-beli elem van.

Más szóval,

$$\mathbf{V}/\mathbf{M} = \{\boldsymbol{x} + \mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{N}\},$$

és ha $\boldsymbol{x} + \mathbf{M} = \boldsymbol{y} + \mathbf{M}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{N}$, akkor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

3. Mutassuk meg, hogy véges dimenziós vektortér esetén a hipersík itteni és 4.1-beli definíciója megegyezik.

7. Konvex kombinációk

7.1. A lineáris kombináció egy speciális és különleges gyakorlati alkalmazásokban fontos esete a konvex kombináció.

1. Definíció *Legyen F nem üres véges halmaz. Az $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{V}$ $(i \in F)$ vektorok* ***konvex kombinációja*** *egy $\sum_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$ alakú összeg, ahol $\alpha_i \in [0,1]$ $(i \in F)$ és $\sum_{i\in F} \alpha_i = 1$.*

Triviálisnak *mondjuk a konvex kombinációt, ha $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}$ minden i-re vagy $\alpha_i = 0$ egyetlen i-t kivéve (vagyis a konvex kombináció „lényegében” egy elemű).*

2. Definíció *A $\mathbf{V}$ vektortér K részhalmazát* ***konvexnek*** *nevezzük, ha K bármely $\boldsymbol{x}_1$ és $\boldsymbol{x}_2$ elemével együtt tartalmazza azok minden konvex kombinációját is.*

7.2. Minden lineáris altér konvex halmaz.

Nyilvánvaló, hogy akárhány konvex halmaz metszete is konvex halmaz.

Ezért értelmezhetjük a H részhalmaz **konvex burkát** úgy, mint a H-t tartalmazó konvex részhalmazok metszetét, amely természetesen a H-t tartalmazó legszűkebb konvex részhalmaz.

Ugyanúgy, mint a lineáris burok esetén, megmutathatjuk, hogy a H konvex burka egyenlő a H elemeiből vett összes lehetséges konvex kombinációk halmazával.

H ***konvex-független***, ha egyik eleme sincs benne a többiek konvex burkában.

Ha egy vektor a H különböző elemeinek a konvex kombinációja, az elemek és az együtthatók pontosan akkor egyértelműek, ha H konvex-független.

Konvex kombinációk konvex kombinációja is konvex kombináció.

7.2. A különböző $\boldsymbol{x}_1$ és $\boldsymbol{x}_2$ vektorok konvex burka az $\boldsymbol{x}_1$-et és $\boldsymbol{x}_2$-t **összekötő egyenesszakasz**:

$$\begin{aligned}[x_1, x_2] :=& \{\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1],\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\} = \\ =& \{\boldsymbol{x}_1 + \alpha(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \mid \alpha \in [0,1]\}.\end{aligned}$$

Ez valóban része az $\boldsymbol{x}_1$-en és $\boldsymbol{x}_2$-n átmenő egyenesnek.

A nem egy egyenesbe eső $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ és $\boldsymbol{x}_3$ vektorok (azaz egyik sem állítható elő a másik kettő konvex kombinációjaként) konvex burka az $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ **csúcspontú háromszög**.

Ezeket a meghatározásokat az $\mathbb{R}^2$ szokásos geometriai szemléltetéséből vettük át.

Általában, ha $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ olyan vektorok, hogy egyikük sincs benne a többiek konvex burkában, akkor ezeknek a vektoroknak a konvex burka az $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ **csúcspontú poliéder**.

A K konvex halmaz egy pontját **extremálisnak** nevezzük, ha nem állítható elő K elemeinek nem triviális konvex kombinációjaként.

Egy poliéder extremális pontjai épp a csúcspontjai.

7.3. Definíció *Egy vektortér $K \neq \emptyset$ részhalmazát* ***nulla csúcsú kúpnak*** *hívjuk, ha K bármely elemének minden pozitív számszorosa is K-ban van.*

Állítás *Egy vektortér K részhalmaza pontosan akkor*

(i) nulla csúcsú kúp, ha $\mathbb{R}^+K = K$,

(ii) nulla csúcsú konvex kúp, ha bármely $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$, $\alpha + \beta \neq 0$ esetén $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in K$.

Bizonyítás (i) A defínció szerint K pontosan akkor nulla csúcsú kúp, ha $\mathbb{R}^+K \subset K$; viszont $\mathbb{R}^+K \supset K$ is teljesül, hiszen $1 \in \mathbb{R}^+$.

(ii) Ha az adott fetétel teljesül, akkor K konvex is ($\alpha + \beta = 1$), kúp is ($\beta = 0$). Ha viszont K konvex kúp, akkor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$ és $\alpha', \beta' \in [0, 1]$, $\alpha' + \beta' = 1$, valamint $\gamma \in \mathbb{R}^+$ esetén $\gamma(\alpha'\boldsymbol{x} + \beta'\boldsymbol{y}) \in K$; látjuk, hogy $\alpha := \gamma\alpha'$, $\beta := \gamma\beta'$ jelöléssel a szóban forgó feltétel teljesül. ■

A legegyszerűbb nulla csúcsú kúpok a **félegyenesek**, amelyek egy nem nulla vektor pozitív (illeve negatív) számszorosai: $\mathbb{R}^+\boldsymbol{x}$ illetve $\mathbb{R}^-\boldsymbol{x}$, ahol $x \neq \boldsymbol{0}$.

A K részhalmazt $\boldsymbol{x}$ **csúcsú kúpnak** hívjuk, ha $K - \boldsymbol{x}$ nulla csúcsú kúp; más szóval, ha van olyan K_0 nulla csúcsú kúp úgy, hogy $K = \boldsymbol{x} + K_0$.

7.4. (i) Konvex halmaz például

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \qquad \overline{K} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

K-nak nincs extremális pontja, $\overline{K}$ extremális pontjainak az összessége $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(ii) Kúp például

$$\begin{aligned}
&\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, |\mathrm{Im} z| = |\mathrm{Re} z|\},\\
&\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 0, |\mathrm{Im} z| = \mathrm{Re} z\},\\
&\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im} z| < |\mathrm{Re} z|\},\\
&\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 0, |\mathrm{Im} z| < \mathrm{Re} z\}.
\end{aligned}$$

Ezek közül csak az utolsó konvex kúp. Kúpot kapunk akkor is, ha ezekhez a halmazokhoz a nullát is hozzávesszük.

7.5. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy egy egy vektortér K részhalmaza pontosan akkor konvex, ha minden $x_1, x_2 \in K$ esetén $[x_1, x_2] \subset K$.

2. Mutassuk meg, hogy ha K konvex halmaz, akkor bármely $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén αK is konvex.

3. Milyen feltételek mellett lesz két konvex halmaz komplexus-összege is konvex? És két kúpé?

4. Vegyük rendre azon (ξ_1, ξ_2, ξ_3) elemek halmazát $\mathbb{K}^3$-ból, amelyekre
(i) $\xi_1^2 = \xi_2^2 + \xi_3^2$,
(ii) $|\xi_1|^2 < |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2$,
(iii) $|\xi_1|^2 \leq |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2, \quad \xi_1 \neq 0$,
(iv) $\xi_1 \xi_2 = \xi_3$,
(v) $|\xi_1| > 0, \quad |\xi_2| > 0$,
(vi) $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \leq 0$,
(vii) $|\xi_1| \leq 1, \quad |\xi_2| \leq 1, \quad |\xi_3| \leq 1$,
(viii) $|\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| < 1$.
Döntsük el, ezek közül melyek konvexek és melyek kúpok. Mik a konvex halmazok extremális pontjai?

II. LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

8. Lineáris leképezések

8.1. Definíció *Legyen* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *(azonos* $\mathbb{K}$ *test feletti) vektortér. Az* $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *leképezést* ***lineárisnak*** *nevezzük, ha minden* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ *és* $\alpha \in \mathbb{K}$ *esetén*

(i) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, *(ii)* $\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Megállapodás szerint a lineáris leképezések mellől, ha lehet, elhagyjuk a zárójelet; ezt alkalmaztuk már az előbb is, amikor $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ helyett $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$-et írtunk.

Az (ii) tulajdonságból – $\alpha = 0$ helyettesítéssel – rögtön adódik, hogy $\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

A meghatározó két tulajdonság egyenértékű azzal, hogy $\boldsymbol{A}$ felcserélhető a lineáris kombináció képzésével, azaz

$$\boldsymbol{A}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i.$$

8.2. A következő példákban felsorolt leképezések lineárisak.

(i) Bármely $\mathbf{V}$ vektortér esetén $\mathrm{id}_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

(ii) Bármely $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ vektortér esetén $\mathbf{0} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{0}$; ezt a **nulla-leképezésnek** hívjuk, és ugyanazzal a $\mathbf{0}$ szimbólummal jelöljük, mint a nullavektorokat; ez összhangban van a konstans leképezésekre vonatkozó megállapodásunkkal.

(iii) $M, N \in \mathbb{N}$, $M < N$ esetén $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$, $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_M)$.

(iv) $\mathrm{pr}_k : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto \xi_k$ a k-adik **kanonikus projekció** ($k = 1, \ldots, N$).

(v) Ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ vektorterek, akkor $\mathrm{pr}_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u}$ és $\mathrm{pr}_{\mathbf{V}} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{v}$; hasonlóan,

$$\mathrm{pr}_k : \mathop{\times}_{i\in I} \mathbf{V}_i \to \mathbf{V}_k, \quad (\boldsymbol{x}_i)_{i\in I} \mapsto \boldsymbol{x}_k \qquad (k \in I).$$

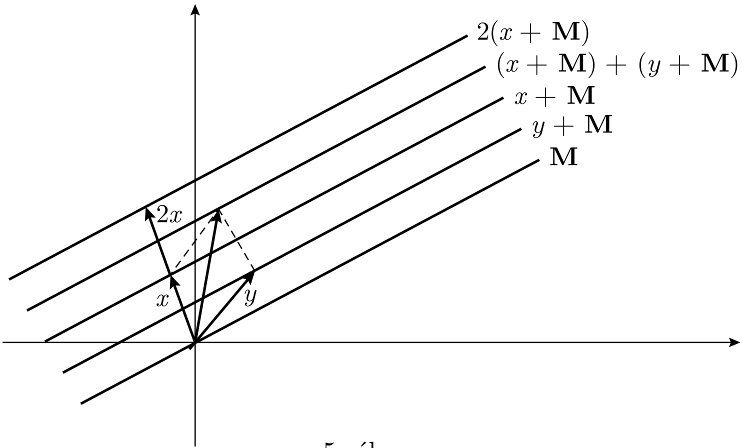
(vi) Legyenek $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ kiegészítő alterek $\mathbf{V}$-ben. Ekkor a $\mathbf{V}$ minden $\boldsymbol{x}$ eleme egyértelműen előáll $\boldsymbol{x}_{\mathbf{M}} + \boldsymbol{x}_{\mathbf{N}}$ alakban, ahol $\boldsymbol{x}_{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$ és $\boldsymbol{x}_{\mathbf{N}} \in \mathbf{N}$. A

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_{\mathbf{M}}$$

leképezést az **N mentén** az $\mathbf{M}$-re való **vetítésnek** nevezzük. Speciálisan

$$\boldsymbol{P}_{\{\mathbf{0}\}\mathbf{V}} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}, \qquad \boldsymbol{P}_{\mathbf{V}\{\mathbf{0}\}} = \mathbf{0}.$$

Az aritmetikai síkon igen szemléletes egy ilyen vetítés (5. ábra)



5. ábra

(vii) Ha T nem üres halmaz és $\mathbf{V}$ vektortér, akkor bármely $t \in T$ esetén (lásd az 1.2.(iv) példát) a t-beli **kiértékelés**:

$$\delta_t : \mathbf{V}^T \to \mathbf{V}, \quad f \mapsto f(t).$$

(viii) A polinomok $\mathbf{P}$ vektorterén
– a **differenciálás**:

$$\boldsymbol{D} : \mathbf{P} \mapsto \mathbf{P}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{id}^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k \mathrm{id}^{k-1},$$

– az adott q polinommal való **szorzás**:

$$\boldsymbol{M}_q : \mathbf{P} \to \mathbf{P}, \quad p \mapsto qp.$$

(ix) A ϕ szögű **forgatás** az aritmetikai síkon:

$$\boldsymbol{R}_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1 \cos\phi - \xi_2 \sin\phi,\ \xi_1 \sin\phi + \xi_2 \cos\phi).$$

8.3 Jelölje $\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ a $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ lineáris leképezések összességét. Igen könnyű megmutatni, hogy ha $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{W})$, akkor a pontonként értelmezett $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ összegük és α számszorosuk szintén $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ lineáris leképezés. Például

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) =&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Ay}+\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{By}=\\ =&\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{Ay}+\boldsymbol{By}=\\ =&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ a pontonként értelmezett műveletekkel vektortér; más szóval, a $\mathbf{W}^{\mathbf{V}}$ vektortér altere.

Ugyancsak egyszerű tény, hogy ha $\boldsymbol{A}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{W})$, $\boldsymbol{B}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{U},\mathbf{V})$, akkor $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{U},\mathbf{W})$:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{By})=\boldsymbol{ABx}+\boldsymbol{ABy}=\\ &=(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{y}\qquad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathrm{U}),\end{aligned}$$

és hasonló egyenlőségeket írhatunk a számmal szorzásra is.

Megállapodás szerint a lineáris leképezések kompozícióját **szorzásnak** nevezzük, és többnyire elhagyjuk a kompozíció jelét, azaz

$$\boldsymbol{AB}:=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}.$$

Különösen érdekes az $\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{W}$ eset. A $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}):=\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{V})$ jelöléssel tehát van egy

$$\mathrm{Lin}(\mathbf{V})\times\mathrm{Lin}(\mathbf{V})\to\mathrm{Lin}(\mathbf{V}),\quad(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\mapsto\boldsymbol{AB}$$

szorzásunk, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

L1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$,

L2) $\boldsymbol{A}\mathbf{0}=\mathbf{0}\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$,

LA) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, $\quad(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$,

LM) $\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{AB}$.

Egy vektorteret, amelyen értelmezett a fenti tulajdonságú szorzás, **algebrának** nevezünk. Ezzel a szóhasználattal élve $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ algebra.

Külön felhívjuk a figyelmet arra, hogy ez a szorzás a számok közötti szorzástól két lényeges tulajdonságban különbözik.

Először: ha $\dim\mathbf{V}>1$, akkor nem kommutatív. Például az aritmetikai síkon az 5. ábra jelöléseivel $\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN'}}\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}=\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}\neq\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN'}}=\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN'}}$.

Másodszor: két nemnulla lineáris lelépezés szorzata is lehet nulla. Például az előbbi jelöléseket használva $\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN'}}\boldsymbol{P}_{\mathbf{N'N}}=\mathbf{0}$.

Megjegyezzük még, hogy ha $\boldsymbol{A}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ és $n\in\mathbb{N}$, akkor $\boldsymbol{A}^n$ jelöli $\boldsymbol{A}$-nak önmagával vett n-szeres szorzatát, és definíció szerint $\boldsymbol{A}^0:=\mathrm{id}_{\mathbf{V}}$. Bár a szorzás általában nem kommutatív, $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{(n+m)}$.

Ennek megfelelően, ha p polinom, $p = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{id}_{\mathbb{K}}^k$, akkor értelmezhetjük a

$$p(\boldsymbol{A}) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \boldsymbol{A}^k : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

lineáris leképezést.

8.4. Alapvető az a tény, hogy egy lineáris leképezést egyértelműen meghatároznak bármely bázison felvett értékei. Sőt ennél egy kicsit többet is mondhatunk.

Állítás *Ha B a $\mathbf{V}$ vektortér bázisa, akkor bármely $\mathbf{W}$ vektortér esetén tetszőleges $\boldsymbol{A} : B \to \mathbf{W}$ leképezés egyértelműen kiterjeszthető $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezéssé.*

Bizonyítás Legyen $B = \{\boldsymbol{v}_i \mid i \in I\}$, és definiáljuk $\boldsymbol{A}$ kiterjesztését – amelyet szintén $\boldsymbol{A}$-val jelölünk – a következőképp:

$$\boldsymbol{A} \sum_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{v}_i := \sum_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i \qquad (F \subset I \text{ véges}, \ \alpha_i \in \mathbb{K}, \ i \in F).$$

Mint tudjuk, $\mathbf{V}$ minden eleme előáll a báziselemek egyértelmű, nem nulla együtthatós lineáris kombinációjaként, tehát a kiterjesztés jól definiált. Ha megmutatjuk, hogy ez a kiterjesztés lineáris, akkor már az is következik, hogy ez az egyetlen lineáris kiterjesztés, hiszen bármely ilyennek rendelkeznie kell a fenti definiáló tulajdonsággal.

Tehát csak azt kell belátnunk, hogy a kiterjesztés lineáris. Íme: ha

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \boldsymbol{y} = \sum_{j\in G} \beta_j \boldsymbol{v}_j,$$

akkor

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \sum_{k\in F\cup G} \gamma_k \boldsymbol{v}_k, \qquad \gamma_k := \begin{cases} \alpha_k & \text{ha } k \in F \setminus G, \\ \beta_k & \text{ha } k \in G \setminus F, \\ \alpha_k + \beta_k & \text{ha } k \in F \cap G. \end{cases}$$

Következésképpen

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \sum_{k\in F\cup G} \gamma_k \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k = \sum_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i + \sum_{j\in G} \beta_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}.$$

Azt, hogy $\boldsymbol{A}\alpha\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, még ennél is egyszerűbb megmutatni. ■

Teljesen hasonlóan bizonyítható be az, hogy ha $\{\mathbf{M}_i \mid i \in I\}$ kiegészítő altérrendszer, és adottak $\boldsymbol{A}_i : \mathbf{M}_i \to \mathbf{W}$ lineáris leképezések, akkor van egyetlen olyan $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, hogy $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{M}_i} = \boldsymbol{A}_i$.

Ezt a tényt sokszor használjuk fel olyan formában, hogy egy altéren definiált lineáris leképezés kiterjeszthető lineáris leképezéssé az egész térre úgy, hogy tetszőlegesen de természetesen lineárisan – például nullának – definiáljuk az altér egy kiegészítőjén.

8.5. Íme még néhány fontos tudnivaló lineáris leképezésekkel kapcsolatban .

(i) Legyenek $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}_i$ $(i \in I)$ vektorterek. Ekkor az $\boldsymbol{A}_i : \mathbf{V} \to \mathbf{W}_i$ lineáris leképezések együttese,

$$(\boldsymbol{A}_i)_{i\in I} : \mathbf{V} \to \mathop{\times}_{i\in I} \mathbf{W}_i, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x})_{i\in I}$$

is lineáris leképezés.

(ii) Legyenek $\mathbf{V}_i$ és $\mathbf{W}_i$ $(i \in I)$ vektorterek. Ekkor az $\boldsymbol{A}_i : \mathbf{V}_i \to \mathbf{W}_i$ lineáris leképezések Descartes-szorzata,

$$\mathop{\times}_{i\in I} \boldsymbol{A}_i : \mathop{\times}_{i\in I} \mathbf{V}_i \to \mathop{\times}_{i\in I} \mathbf{W}_i, \qquad (\boldsymbol{x}_i)_{i\in I} \mapsto (\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i)_{i\in I}$$

is lineáris leképezés.

(iii) Legyen $\mathbf{M}$ a $\mathbf{V}$ vektortér lineáris altere. A

$$\Pi_{\mathbf{M}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\mathbf{M}, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \mathbf{M}$$

természetes szürjekció lineáris.

(iv) Legyen $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ komplex vektortér. Tudjuk, ezek egyben valós vektorterek is. Nyilvánvaló, hogy egy $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ $\mathbb{C}$-lineáris leképezés egyben $\mathbb{R}$-lineáris is, hiszen ha a komplex számmal szorzás kihozható a leképezés elé, akkor a valós számmal szorzás is.

Ezzel szemben egy $\mathbb{R}$-lineáris leképezés nem szükségképpen $\mathbb{C}$-lineáris. Például a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex konjugálás $\mathbb{R}$-lineáris de nem $\mathbb{C}$-lineáris.

Az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés pontosan akkor $\mathbb{C}$-lineáris is, ha $\boldsymbol{A}i\boldsymbol{x} = i\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén.

(v) Ha $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$, akkor $\mathbb{K} \to \mathbf{V}$, $\alpha \mapsto \alpha\boldsymbol{v}$ lineáris leképezés. Viszont, ha $\boldsymbol{A} : \mathbb{K} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés, akkor a $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{A}1$ jelöléssel $\boldsymbol{A}\alpha = \alpha\boldsymbol{v}$. Tehát minden $\mathbf{V}$-beli vektorhoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy $\mathbb{K} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezést és viszont. A kölcsönös megfeleltetés lineáris és olyan ,,természetes”, hogy általa azonosíthatjuk egymással $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}, \mathbf{V})$-t és $\mathbf{V}$-t (az azonosítás pontos értelmét később tárgyaljuk).

8.6. Komplex vektorterek esetén sokszor találkozunk a lineáris leképezések mellett konjugált lineáris leképezésekkel is.

Ha $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ komplex vektorterek, az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ leképezést **konjugált lineárisnak** nevezzük, ha minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ esetén

(i) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, (ii) $\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

A $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ konjugált lineáris leképezések is komplex vektorteret alkotnak a potonkénti műveletekkel. Két konjugált lineáris leképezés kompozíciója lineáris. Egy lineáris és egy konjugált lineáris leképezés kompozíciója konjugált lineáris.

A konjugált lineáris leképezéseket is meghatározzák egy bázison felvett értékei: a $\mathbf{V}$ vektortér egy $\{\boldsymbol{v}_i \mid i \in I\}$ bázisán adott $\boldsymbol{A}$ leképezés egyértelműen kiterjeszthető $\mathbf{V}$-re konjugált lineáris leképezéssé a következőképp:

$$\boldsymbol{A}\sum_{i\in F}\alpha_i\boldsymbol{v}_i := \sum_{i\in F}\alpha_i^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i \qquad (F \subset I \text{ véges}, \alpha_i \in \mathbb{K},\ i \in F).$$

$\mathbb{C}^N$-ben a $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto (\xi_1^*, \ldots, \xi_N^*)$ **komplex konjugálás** konjugált lineáris bijekció.

8.7. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy a polinomok $\mathbf{P}$ vektorterén az

$$\boldsymbol{S} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}, \quad \sum_{k=0}^{n}\alpha_k \mathrm{id}^k \mapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}\mathrm{id}^{k+1}$$

integrálás lineáris leképezés!

2. Haszáljuk az előző, valamint a 8.2.(vii) jelöléseit, és igazoljuk, hogy

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}_{\mathrm{id}_\mathbb{K}} - \boldsymbol{M}_{\mathrm{id}_\mathbb{K}}\boldsymbol{D} = \mathrm{id}_\mathbf{P}, \qquad \boldsymbol{D}\boldsymbol{S} = \mathrm{id}_\mathbf{P} \neq \boldsymbol{S}\boldsymbol{D}.$$

3. Mely leképezések lineárisak a következők közül:
(i) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_2, \xi_1)$,
(ii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, -\xi_2)$,
(iii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, \xi_1)$,
(iv) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\xi_1, \xi_2) \mapsto 1 + \xi_1$,
(v) $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1 + \xi_2, i\xi_1)$,
(vi) $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, \xi_1\xi_2)$.

4. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto \xi^*$ komplex konjugálás nem $\mathbb{C}$-lineáris, de $\mathbb{R}$-lineáris. Ez azon múlik, hogy a komplex számmal szorzás nem cserélhető fel a konjugálással, de a valós számmal szorzás igen.

5. Adjunk meg olyan $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezéseket, hogy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ de $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$.

6. Legyen $\mathbf{M}$ a $\mathbf{V}$ vektortér valódi altere. Mutassuk meg, hogy bármely nem nulla dimenziós $\mathbf{W}$ vektortér esetén van olyan nem nulla $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés, amely az $\mathbf{M}$-en nulla.

7. Igazoljuk, hogy minden $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^M$ konjugált lineáris leképezés egy $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^M$ lineáris leképezés és $\mathbb{C}^M$ komplex konjugálásának a kompozíciója.

8. Legyen H a $\mathbf{V}$ vektortér részhalmaza és $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Bizonyítsuk be, hogy $\boldsymbol{A}[\mathrm{Span}H] = \mathrm{Span}(\boldsymbol{A}[H])$.

9. Mutassuk meg, hogy a 8.2.(v)-ben bevezetett lineáris leképezésekre
(i) $\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}^2 = \boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}$, (ii) $\boldsymbol{P}_{\mathbf{NM}} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}$
teljesül.

10. Legyen p és q polinom, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. Ekkor
(i) $p(\boldsymbol{A}) + q(\boldsymbol{A}) = (p+q)(\boldsymbol{A})$, (ii) $p(\boldsymbol{A})q(\boldsymbol{A}) = (pq)(\boldsymbol{A})$.

9. Magtér, képtér

9.1. Állítás *Legyen* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

(i) Ha $\mathbf{M}$ *lineáris altér* $\mathbf{V}$*-ben, akkor* $\boldsymbol{A}[\mathbf{M}]$ *lineáris altér* $\mathbf{W}$*-ban; speciálisan,* $\mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$ *az* $\mathbf{W}$ *lineáris altere.*

(ii) Ha $\mathbf{N}$ *lineáris altér* $\mathbf{W}$*-ben, akkor* $\overset{-1}{\boldsymbol{A}}(\mathbf{N})$ *lineáris altér* $\mathbf{V}$*-ben.*

Bizonyítás (i) Legyen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}[\mathbf{M}]$. Ekkor van olyan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$, hogy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b}$. Következésképpen bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{Ax} + \beta\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A}[\mathbf{M}]$.

(ii) Legyen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \overset{-1}{\boldsymbol{A}}(\mathbf{N})$. Ekkor $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbf{N}$, tehát bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{Ax} + \beta\boldsymbol{Ay} \in \mathbf{N}$, azaz $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in \overset{-1}{\boldsymbol{A}}(\mathbf{N})$. ∎

Speciálisan,

$$\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{V} \mid \boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}\} = \overset{-1}{\boldsymbol{A}}(\{\mathbf{0}\})$$

az $\boldsymbol{A}$ **magja** vagy **magtere** lineáris altér $\mathbf{V}$-ben.

9.2. Lineáris leképezések lineárisan összefüggő vektorokat lineárisan összefüggő vektorokba képeznek. Közelebbről, ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ és H a $\mathbf{V}$-nek lineárisan összefüggő részhalmaza, akkor $\boldsymbol{A}[H]$ az $\mathbf{W}$-nek lineárisan összefüggő részhalmaza. Ez abból következik, hogy $\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$: ha a nulla előállítható H-beli elemek nem triviális lineáris kombinációjaként, akkor $\boldsymbol{A}[H]$-beli elemek nem triviális lineáris kombinációjaként is.

Ezzel szemben lineárisan független halmaz lineáris leképezés általi képe nem szükségképpen lineárisan független.

Állítás *Legyen* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. *A következő három kijelentés egyenértékű:*

(i) $\boldsymbol{A}$ *injektív,*

(ii) $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}\}$,

(iii) a $\mathbf{V}$ *bármely* H *lineárisan független részhalmazára* $\boldsymbol{A}[H]$ *lineárisan független.*

Bizonyítás (i)$\Rightarrow$(ii). Ha $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} \neq \{\mathbf{0}\}$, akkor van olyan $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, hogy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = \boldsymbol{A}\mathbf{0}$, azaz $\boldsymbol{A}$ nem injektív.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Tegyük fel, hogy van olyan $\{\boldsymbol{x}_i \mid i \in I\}$ lineárisan független részhalmaz, hogy $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i \mid i \in I\}$ lineárisan összefüggő. Ekkor van az I-nek F véges részhalmaza és $\alpha_i \neq 0$ $(i \in F)$, hogy $\mathbf{0} = \sum_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{A} \sum_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$. Az $\boldsymbol{x}_i$-k lineáris függetlensége miatt $\sum_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \neq 0$, tehát $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} \neq \{\mathbf{0}\}$.

(iii)$\Rightarrow$(i). Ha $\boldsymbol{A}$ nem injektív, akkor létezik $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, és $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, azaz $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$. Tehát $\boldsymbol{A}$ a lineárisan független $\{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\}$ halmazt a lineárisan összefüggő $\mathbf{0}$-ba képezi. ■

Az állítás első két pontját gyakran használjuk, ezért érdemes külön is megfogalmazni: $\boldsymbol{A}$ akkor és csak akkor injektív, ha $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ maga után vonja, hogy $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

9.3. Előző eredményünk legelső alkalmazásával a következő bizonyításban találkozunk.

Állítás *Legyen* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. *Ha* $\mathbf{N}$ *a* $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$ *kiegészítő altere, akkor* $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{N}}$ *injektív, továbbá* $\mathrm{Ran}\boldsymbol{A} = \mathrm{Ran}(\boldsymbol{A}|_{\mathbf{N}})$.

Bizonyítás $\mathbf{N} \cap \mathrm{Ker}\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}\}$, tehát ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{N}$ és $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, tehát $\boldsymbol{A}$ leszűkítése $\mathbf{N}$-re injektív. Minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ felírható $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ alakban, ahol $\boldsymbol{y} \in \mathbf{N}$ és $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$, tehát $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, így nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{A}$-nak és $\mathbf{N}$-re való leszűkítésének az értékkészlete ugyanaz.

9.4. Az előző állítás szerint $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{N}}$ injektív, így $\mathbf{N}$ és $\mathrm{Ran}(\boldsymbol{A}|_{\mathbf{N}}) = \mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$ bázisai azonos számosságúak, ezért az 5.1. állítás utáni megjegyzésünk értelmében megállapíthatjuk, hogy

$$\dim(\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}) + \dim(\mathrm{Ran}\boldsymbol{A}) = \dim(\mathrm{Dom}\boldsymbol{A}).$$

Szokásos elnevezés szerint az $\boldsymbol{A}$ lineáris leképezés
– **rangja** $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} := \dim(\mathrm{Ran}\boldsymbol{A})$,
– **elfajulásának foka** $\mathrm{def}\boldsymbol{A} := \dim(\mathrm{Ker}\boldsymbol{A})$,
– **értelmezési dimenziója** $\dim\boldsymbol{A} := \dim(\mathrm{Dom}\boldsymbol{A})$.
Ezekkel a fogalmakkal az előző összefüggést így is írhatjuk:

$$\mathrm{def}\boldsymbol{A} + \mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \dim\boldsymbol{A}.$$

9.5. Jelentős szerepet kapnak a későbbiekben az alterekre való vetítések. Ha $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ kiegészítő alterek a $\mathbf{V}$ vektortérben, 8.2.(v)-ben bevezettük a $\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}$ leképezést, az $\mathbf{N}$ mentén az $\mathbf{M}$-re való vetítést. Igen egyszerű tények, hogy

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}^2 = \boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}, \qquad \mathbf{M} = \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}, \qquad \mathbf{N} = \mathrm{Ker}\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}.$$

Most ugyanezt fordított oldalról közelítjük meg.

Állítás *Legyen* $\boldsymbol{P} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *olyan lineáris leképezés, hogy* $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$. *Ekkor* $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P}$ *és* $\mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$ *kiegészítő alterek, és* $\boldsymbol{P}$ *a* $\mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$ *mentén a* $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P}$*-re való vetítés.*

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ran}\boldsymbol{P} \cap \mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$, akkor egyrészt van olyan $\boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$, hogy $\boldsymbol{Py} = \boldsymbol{x}$, másrészt $\boldsymbol{Px} = \mathbf{0}$; mivel $\mathbf{0} = \boldsymbol{Px} = \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Py} = \boldsymbol{x}$, látjuk, hogy $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P} \cap \mathrm{Ker}\boldsymbol{P} = \{\mathbf{0}\}$. Továbbá bármely $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Px} \in \mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$, hiszen $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Px}) = \boldsymbol{Px} - \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, ezért az

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Px} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Px}) \qquad (*)$$

felbontás mutatja, hogy $\mathbf{V} = \mathrm{Ran}\boldsymbol{P} + \mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$, vagyis az előzővel együtt: $\mathbf{V} = \mathrm{Ran}\boldsymbol{P} \oplus \mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$. A $(*)$ egyenlőség egyben azt is mutatja, hogy $\boldsymbol{P}$ a $\mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$ mentén a $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P}$-re való vetítés.

Definíció *Egy* $\boldsymbol{P} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris leképezést* **projektornak** *hívunk, ha* $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$.

9.6. Világos, hogy $\boldsymbol{P}_{\mathbf{NM}} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}$, másképpen: $\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}} + \boldsymbol{P}_{\mathbf{NM}} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$, továbbá $\boldsymbol{P}_{\mathbf{NM}}\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}} = \boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}\boldsymbol{P}_{\mathbf{NM}} = \mathbf{0}$. Ennek egyszerű általánosítása: ha $\{\mathbf{M}_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ kiegészítő altérrendszer, és $\boldsymbol{P}_i$ a $\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathbf{M}_k$ mentén az $\mathbf{M}_i$-re való vetítés, akkor

$$\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j = \mathbf{0} \text{ ha } i \neq j, \qquad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}. \qquad (*)$$

Ezt is megfordíthatjuk.

Állítás *Ha* $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ *olyan projektorok, amelyekre* $(*)$ *teljesül, akkor*

$\mathrm{Ker}\boldsymbol{P}_i = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_k$.

Bizonyítás Az egyszerűség kedvéért vegyük az $i = 1$ esetet. Ha $\boldsymbol{x} \in \sum_{i=2}^{n} \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_k$, akkor léteznek $\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ vektorok úgy, hogy $\boldsymbol{x} = \sum_{k=2}^{n} \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{x}_k$, és ezért $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x} = \sum_{k=2}^{n} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$. Ha viszont $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{x} = \sum_{k=2}^{n} \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{x}$.

9.7. Feladatok

1. A leképezések együttesére és Descartes-szorzatára vonatkozó általános ismereteink alapján

(i) ha $\boldsymbol{A}_i \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W}_i)$ $(i \in I)$, akkor

$$\mathrm{Ker}\,((\boldsymbol{A}_i)_{i\in I}) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}_i.$$

(ii) ha $\boldsymbol{A}_i \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}_i, \mathbf{W}_i)$ $(i \in I)$, akkor

$$\mathrm{Ran}\left(\bigtimes_{i\in I} \boldsymbol{A}_i\right) = \bigtimes_{i\in I} \mathrm{Ran}\boldsymbol{A}_i.$$

$$\mathrm{Ker}\left(\bigtimes_{i\in I} \boldsymbol{A}_i\right) = \bigtimes_{i\in I} \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}_i.$$

2. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{M}$ a $\mathbf{V}$ vektortér lineáris altere, akkor a $\Pi_{\mathbf{M}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\mathbf{M}$ természetes szürjekció magja $\mathbf{M}$.

3. Adjunk meg olyan $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ lineáris leképezést, amelynek
(i) magtere 2 dimenziós, (ii) képtere két dimenziós.

4. Adjunk meg olyan $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ lineáris leképezést, amelynek képterét az $(1, 0, 0, 0)$ és $(0, 1, 0, i)$ vektorok feszítik ki.

5. Mi a polinomok vektorterén értelmezett differenciálás illetve integrálás értékkészlete és magja?

6. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés magtere és képtere nem szükségképpen kiegészítő alterek (noha a dimenziójuk összege megegyezik a $\mathbf{V}$ dimenziójával).

7. Legyen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \le \mathrm{rank}\boldsymbol{A} + \mathrm{rank}\boldsymbol{B},$$

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{AB} \le \min\{\mathrm{rank}\boldsymbol{A}, \mathrm{rank}\boldsymbol{B}\},$$

$$\mathrm{def}\boldsymbol{AB} \le \mathrm{def}\boldsymbol{A} + \mathrm{def}\boldsymbol{B};$$

ha $\boldsymbol{A}$ injektív, akkor $\mathrm{rank}\boldsymbol{AB} = \mathrm{rank}\boldsymbol{B}$, és ha $\boldsymbol{B}$ szürjektív, akkor $\mathrm{rank}\boldsymbol{AB} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$.

8. Legyen $\mathbf{N}$ lineáris altér $\mathbf{W}$-ban. Mutassuk meg, hogy azok a $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezések, amelyek értékkészlete benne van $\mathbf{N}$-ben, lineáris alteret alkotnak $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$-ban. Ez az altér természetes módon azonosítható $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{N})$-nel.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ olyan, hogy $\boldsymbol{P}|_{\mathrm{Ran}\boldsymbol{P}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ran}\boldsymbol{P}}$, akkor $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$.

10. Legyen $\boldsymbol{P}_1$ az $\mathbf{N}_1$ mentén $\mathbf{M}_1$-re, $\boldsymbol{P}_2$ az $\mathbf{N}_2$ mentén az $\mathbf{M}_2$-re vetítés. Igazoljuk, hogy

(i) $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ pontosan akkor vetítés, ha $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 = \mathbf{0}$; ekkor $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ az $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ mentén az $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$-re való vetítés.

(ii) $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2$ pontosan akkor vetítés, ha $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2$; ekkor $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2$ az $\mathbf{N}_1 + \mathbf{M}_2$ mentén az $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{N}_2$-re való vetítés.

(iii) Ha $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 =: \boldsymbol{P}$, akkor $\boldsymbol{P}$ az $\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$ mentén az $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$-re való vetítés.

11. Igazoljuk, hogy $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ esetén $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{V} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Bx}\}$ lineáris altér. Mi ez az altér, ha $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$?

12. Legyen $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, és definiáljuk az $\boldsymbol{L_A} : \mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, $\boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{AX}$ leképezést. Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{L_A}$ lineáris és $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(\mathbf{V}))$, $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{L_A}$ lineáris injekció, amely azonban nem szürjekció, ha $\dim\mathbf{V} > 1$.

13. Legyen $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ a $\mathbf{V}$ vektortér bázisa. Határozzuk meg az

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}_1) := -2v_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}_2) := \boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}_3) := v_1 + \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3$$

formulákkal meghatározott $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés

(i) magját, a magjának egy bázisát,

(ii) képterét, a képterének egy bázisát,

(iii) az $\overset{-1}{\boldsymbol{A}}\{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3\}$ lineáris alteret.

14. Legyen $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$) a $\mathbf{V}$ vektortér bázisa, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ a $\mathbf{W}$ vektortér bázisa. Határozzuk meg $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{v}_1) := \alpha\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + 2\boldsymbol{w}_3, \quad \boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{v}_2) := 2\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_3,$$

$$\boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{v}_3) := 5w_1 + \alpha\boldsymbol{v}_2, \quad \boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{v}_4) := 2\boldsymbol{w}_2 + 5\boldsymbol{w}_3$$

formulákkal meghatározott $\boldsymbol{A}_\alpha : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés

(i) magját, a magjának egy bázisát,

(ii) képterét, a képterének egy bázisát.

Milyen α-ra van $3\boldsymbol{w}_1 + \alpha\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_3$ az $\boldsymbol{A}_\alpha$ értékkészletében?

10. Izomorfizmusok

10.1. Ha $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ injektív lineáris leképezés, akkor az inverze $\boldsymbol{A}^{-1} : \mathrm{Ran}\boldsymbol{A} \to \mathbf{V}$ is lineáris leképezés. Erről könnyű meggyőződni: ha $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Ax}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ay}$, akkor

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{A}^{-1}(\alpha\boldsymbol{Ax} + \beta\boldsymbol{Ay}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})) = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = \\ &= \alpha\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

Különösen fontosak a bijektív lineáris leképezések, ezeket **izomorfizmusoknak** nevezzük. Nyilvánvaló, hogy két izomorfizmus szorzata (kompozíciója) is izomorfizmus. Egy izomorfizmus nem nulla számszorosa szintén izomorfizmus. Ezzel szemben két izomorfizmus összege nem szükségképpen izomorfizmus. Például ha

$\boldsymbol{A}$ izomorfizmus, akkor $-\boldsymbol{A}$ is az, de $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ már nem (kivéve, ha a vektorterek nulla dimenziósak).

Az injekciók kompozíciójának az inverzére vonatkozó általános formula szerint, ha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ olyan izomorfizmus, amelyek összeszorozhatók (azaz komponálhatók), akkor $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$. Továbbá egyszerű megmutatni, hogy ha $0\neq\alpha$, akkor $(\alpha\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}\boldsymbol{A}$.

Ha $\boldsymbol{A}$ olyan izomorfizmus, amely egy vektorteret önmagába képez, akkor $\boldsymbol{A}^n$ is izomorfizmus; az $\boldsymbol{A}^{-n}:=(\boldsymbol{A}^n)^{-1}$ jelölést szoktunk használni ($n\in\mathbb{N}$).

10.2. Az alábbi eredmény a 9.4. egyszerű következménye.

Állítás *Legyen* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *vektortér,* $\dim\mathbf{V}=\dim\mathbf{W}<\infty$. *Ekkor egy* $\boldsymbol{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ *lineáris leképezésre az alábbi három tulajdonság egyenértékű:*

(i) injektív, (ii) szürjektív, (iii) bijektív.

Tudjuk a leképezések általános tulajdonságából, hogy egy $\boldsymbol{A}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{W})$
(i) injektív, ha létezik $\boldsymbol{B}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{W},\mathbf{V})$ úgy, hogy $\boldsymbol{BA}=\mathrm{id}_{\mathbf{V}}$,
(ii) szürjektív, ha létezik $\boldsymbol{C}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{W},\mathbf{V})$ úgy, hogy $\boldsymbol{AC}=\mathrm{id}_{\mathbf{W}}$.

Jó megjegyezni, hogy azonos véges dimenziójú vektorterek közötti $\boldsymbol{A}$ lineáris leképezésre a fenti két tulajdonság akármelyikéből következik a másik, és az, hogy $\boldsymbol{A}$ izomorfizmus, továbbá ekkor $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}$. Végtelen dimenziós vektorterek esetén a fenti két tulajdonságból egy nem elég ahhoz, hogy $\boldsymbol{A}$ izomorfizmus legyen. Példát erre a 8.7.2. feladatban láttunk.

10.3. Állítás *Ha* $\mathbf{V}$ *vagy* $\mathbf{W}$ *véges dimenziós, pontosan akkor létezik* $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ *izomorfizmus, ha* $\dim\mathbf{V}=\dim\mathbf{W}$.

Bizonyítás Ha van $\boldsymbol{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ izomorfizmus, akkor a 9.4. formulája szerint $\dim\mathbf{W}=\dim(\mathrm{Ran}\boldsymbol{A})=\dim(\mathrm{Dom}\boldsymbol{A})=\dim\mathbf{V}$.

Ha viszont $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ dimenziója ugyanaz az N szám, akkor vegyük a $\mathbf{V}$ egy $\{\boldsymbol{v}_i\mid i=1,\dots,N\}$ és az $\mathbf{W}$ egy $\{\boldsymbol{u}_i\mid i=1,\dots,N\}$ bázisát. Az az $\boldsymbol{A}$ lineáris leképezés, amelyet a 8.4. állítás szerint $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i:=\boldsymbol{u}_i$ $(i=1,\dots,N)$ határoz meg, izomorfizmus. ■

Megjegyezzük, hogy az állításnak az a fele, hogy ha létezik $\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ lineáris bijekció, akkor $\dim\mathbf{V}=\dim\mathbf{W}$, igaz végtelen dimenzió esetén is.

10.4. Sokszor jó hasznát vesszük az alábbi egyszerű tényeknek.

Állítás *Legyen* $\mathbf{V}=\mathbf{M}\oplus\mathbf{N}$. *Ekkor*

(i) $\mathbf{M}\times\mathbf{N}\to\mathbf{V},\quad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mapsto\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$,
(ii) $\mathbf{N}\to\mathbf{V}/\mathbf{M},\quad\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{x}+\mathbf{M}$

lineáris bijekciók. ■

Az utóbbi a 6.3. állítás következménye és úgy is megfogalmazható, hogy a $\Pi_{\mathbf{M}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\mathbf{M}$ természetes szürjekciónak a leszűkítése izomorfizmus $\mathbf{N}$ és $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ között.

10.5. A faktorterek a lineáris leképezesekkel kapcsolatban válnak nagy jelentőségűvé az alábbiak szerint.

Állítás *Legyen* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. *Ekkor egyértelműen létezik egy* $\boldsymbol{A}_0 : \mathbf{V}/\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} \to \mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$ *izomorfizmus úgy, hogy* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 \circ \Pi_{\boldsymbol{A}}$, *ahol* $\Pi_{\boldsymbol{A}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$ *a természetes szürjekció.*

Bizonyítás Definiáljuk $\boldsymbol{A}_0$-t úgy, hogy az előírt tulajdonsággal rendelkezzen:

$$\boldsymbol{A}_0(\Pi_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}).$$

Az a kérdés persze, jó-e ez a meghatározás: baj volna, ha $\Pi_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \Pi_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{y}$, de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Mivel $\Pi_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \Pi_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{y}$ azt jelenti, hogy $\Pi_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$, azaz $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$, látjuk, hogy $\Pi_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \Pi_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{y}$, pontosan akkor teljesül, ha $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Az $\boldsymbol{A}_0$ jól definiáltságán túl ez rögtön azt is mutatja, hogy $\boldsymbol{A}_0$ injektív. ■

Eredményünk szerint tehát $\mathbf{V}/\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$ és $\mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$ azonos dimenziójúak, ezért

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}) = \dim(\mathrm{Ran}\boldsymbol{A}).$$

10.6. Azok a vektorterek, amelyek **izomorfak** – azaz van közöttük izomorfizmus – lineáris szerkezetüket tekintve ugyanolyanok. Ez azt jelenti, hogy bármilyen állítás, ami egy vektortérre igaz, és csak az 1.1. definícióból és következményeiből fakadó fogalmakat tartalmaz, igaz a vektortérrel izomorf vektortérre is.

Az egyik legfontosabb tény, hogy egy $\mathbb{K}$ fölötti N dimenziós vektortér izomorf $\mathbb{K}^N$-nel. $\mathbb{K}^N$ elemei egyszerűek, jól, kezelhetők, ezért sokszor könnyebb $\mathbb{K}^N$-nel dolgozni egy általános N dimenziós vektortér helyett. Ugyanakkor $\mathbb{K}^N$ olyan tulajdonságokkal is rendelkezik, amelyek nincsenek kapcsolatban a lineáris szerkezetével, tehát $\mathbb{K}^N$-re olyan állítások is igazak lehetnek, amelyeknek nincs is értelme egy általános N dimenziós vektortérre. Például szokás $\mathbb{K}^N$-ben pozitív elemekről beszélni, vagyis azokról, amelyeknek minden koordinátája pozitív, és ezekre bizonyos állításokat megfogalmazni. Pozitív elemek akármilyen véges dimenziós vektortérben nem léteznek.

Ha $\{\boldsymbol{v}_i \mid= 1, \ldots, N\}$ egy $\mathbf{V}$ vektortér bázisa és $\{\boldsymbol{e}_i \mid i = 1, \ldots, N\}$ a $\mathbb{K}^N$ standard bázisa, akkor $\boldsymbol{v}_i \mapsto \boldsymbol{e}_i$ izomorfizmust definiál $\mathbf{V}$ és $\mathbb{K}^N$ között. Tehát $\mathbf{V}$ és $\mathbb{K}^N$ között annyi izomorfizmus van, ahány bázisa $\mathbf{V}$-nek. Minden bázis és izomorfizmus egyenrangú; egyik sem ,,jobb", ,,különlegesebb" a többinél. Ezt úgy szoktuk megfogalmazni, hogy egy N dimenziós vektortér és $\mathbb{K}^N$ *ugyanolyanok, de nem azonosak.*

Ha van két vektortér között egy ,,különleges", ,,kitüntetett", ,,jobb, mint a többi" izomorfizmus, akkor a két vektorteret *azonosnak* tekintjük (*azonosítjuk*) a szóban forgó izomorfizmus által.

Három példával világítjuk ezt meg.

Az első a 4.2.(viii)-ben szerepelt. Legyen $\mathbf{V}$ vektortér, T nem üres halmaz, és S a T valódi nem üres részhalmaza. Egy $\boldsymbol{\phi} : S \to \mathbf{V}$ függvényhez definálјuk az

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} : T \to \mathbf{V}, \quad t \mapsto \begin{cases} \boldsymbol{\phi}(t) & \text{ha} \quad t \in S, \\ \mathbf{0} & \text{ha} \quad t \notin S \end{cases}$$

függvényt. Ezzel megadtunk egy $\mathbf{V}^S \to \mathbf{V}^T$, $\boldsymbol{\phi} \mapsto \hat{\boldsymbol{\phi}}$ injekciót, amely izomorfizmus $\mathbf{V}^S$ és $\mathbf{V}^T$ azon lineáris altere között, amely az S-en kívül nulla függvényekből áll. Ez az izomorfizmus ,,természetes", ,,magától értetődő", és általa azonosítjuk $\mathbf{V}^S$-t a $\mathbf{V}^T$ megfelelő alterével, amit azzal fejezünk ki, hogy elhagyjuk a kalapot a $\boldsymbol{\phi}$-ről, vagyis ugyanazzal a szimbólummal jelöljük a $\mathbf{V}^S$ egy elemét és a $\mathbf{V}^T$-nek a megfelelő elemét, amely az S-en kívül nulla.

A második 8.5.(v)-ben szerepelt: $\mathbf{V}$ és $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}, \mathbf{V})$ elemei ,,természetes módon" megfeleltethetők egymásnak; ez a megfeleltetés izomorfizmus a két vektortér között, ami által azonosítjuk a két vektorteret.

A harmadik egy szintén sokat használt azonosítás: ha $\mathbf{A}$ egy dimenziós vektortér, akkor az alaptest elemei és az $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$ lineáris leképezések között van egy ,,egyszerű" megfeleltetés: az α számnak az α-val való szorzást, vagyis az $\boldsymbol{a} \to \alpha\boldsymbol{a}$ lineáris leképezést feleltetjük meg. Ezzel az izomorfizmussal elfogadjuk a $\mathbb{K}$ és $\mathrm{Lin}(\mathbf{A})$ azonosítását.

Az idézőjelbe tett szavak nem matematikai fogalmak. Hogy mi ,,természetes", ,,kitüntetett" stb., az végül is izlés dolga. Választani egy izomorfizmust és ezzel az azonosítást megcsinálni, az már matematika, és lényegében nem más, mint elhagyni egy jelölést: ugyanazzal a szimbólummal két dolgot jelölni, és közben tudni, mi a ,,természetes" kapcsolat a két dolog között. A vektorterek elemeinek azonosítását, valamint a vektorterek azonosítását hármas egyenlőségjellel jelöljük; ha egy vektorteret egy másiknak egy lineáris alterével azonosítjuk, akkor hármas nyilat írunk. Az említett példáknál:

$$\mathbf{V}^S \Rrightarrow \mathbf{V}^T, \quad \phi \equiv \hat{\phi},$$

$$\mathbf{V} \equiv \mathrm{Lin}(\mathbb{K}, \mathbf{V}), \quad \boldsymbol{u} \equiv (\alpha \mapsto \alpha\boldsymbol{u}),$$

$$\mathbb{K} \equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{A}) \quad \alpha \equiv (\boldsymbol{a} \mapsto \alpha\boldsymbol{a}).$$

10.7. Feladatok

1. Melyek izomorizmusok a 8. fejezetben definiált leképezések közül?

2. Mutassuk meg, hogy adott $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ esetén a $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \gamma\xi_1 + \delta\xi_2)$ lineáris leképezés pontosan akkor bijekció, ha $\alpha\beta - \gamma\delta \neq 0$.

3. $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ akkor és csak akkor izomorfizmus, ha létezik $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\boldsymbol{A}^n$ izomorfizmus. Ennek alapján bizonyítsuk be, hogy ha $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \mathrm{id}_{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{A}$ izomorfizmus.

4. Igazoljuk, hogy $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ izomorf a polinomok vektorterével.

5. Ha $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ izomorfizmus, akkor $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{A}}$ (lásd a 9.5.12. feladatot) is izomorfizmus.

6. Ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$
(i) injektív, akkor létezik $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{W}, \mathbf{V})$ úgy, hogy $\boldsymbol{BA} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$;
(ii) szürjektív, akkor létezik $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{W}, \mathbf{V})$ úgy, hogy $\boldsymbol{AC} = \mathrm{id}_{\mathbf{W}}$.

11. Mátrixok

11.1. Most az $\boldsymbol{A} : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$ lineáris leképezést vizsgáljuk meg közelebbről.

Jeölje $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N$ a $\mathbb{K}^N$ standard bázisát, és $\mathrm{pr}_i : \mathbb{K}^M \to \mathbb{K}$ az i-edik kanonikus projekciót $(i = 1 \dots, M)$. Legyen

$$\alpha_{ik} := \mathrm{pr}_i(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k) \qquad (i = 1, \dots, M;\ k = 1, \dots, N). \tag{$*$}$$

Az így megadott indexezett szám $M \times N$-es, pontosabban

$$(\alpha_{ik} \mid i = 1 \dots, M;\ k = 1 \dots, N) \in \mathbb{K}^{M \times N} \tag{$**$}$$

egyértelműen meghatározza az $\boldsymbol{A}$ lineáris leképezést. Ugyanis,

$$\text{ha} \quad \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \boldsymbol{e}_k, \quad \text{akkor} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k,$$

és így – lévén pr_i lineáris –

$$\mathrm{pr}_i(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik}\xi_k \qquad (i = 1, \dots, M).$$

Viszont az is nyilvánvaló, hogy ha akárhogy adjuk is meg a $\mathbb{K}^{M \times N}$ egy elemét $(**)$ formában, akkor (ha $\boldsymbol{e}_1^M, \dots, \boldsymbol{e}_M^M$ jelöli a $\mathbb{K}^M$ standard bázisvektorait), az

$$\boldsymbol{e}_k \mapsto \sum_{i=1}^{M} \alpha_{ik} \boldsymbol{e}_i^M \qquad (k = 1, \dots, N)$$

formulával lineáris leképezést határoztunk meg (előírjuk értékeit egy bázison), amelyhez a $(*)$ utasítással megadott számok épp a kiindulásul vett $\mathbb{K}^{M \times N}$-beli elemet adják.

A $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$ lineáris leképezéseket tehát – a standard bázis „kitüntetett” szerepe által – $\mathbb{K}^{M \times N}$ elemeivel azonosíthatjuk (figyeljük meg az M és N sorrendjének felcserélődését).

11.2. $\mathbb{K}^{M\times N}$ elemeit $M \times N$-es **mátrixoknak** hívjuk. Egy ilyen mátrix tehát nem más, mint az $\{1,\dots,M\} \times \{1,\dots,N\}$ halmazon értelmezett $\mathbb{K}$ értékű függvény. Az egyébként szokásostól eltérően ezt a Descartes-szorzatot most úgy reprezentáljuk, hogy a vízszintes tengelyen balról jobbra írjuk a számokat 1-től N-ig és a függőleges tengelyen föntről lefelé 1-től M-ig. Ennek megfelelelően a $(**)$ mátrixot így jelenítjük meg:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \cdots & \alpha_{MN} \end{pmatrix}.$$

A mátrixban szereplő számokat a mátrix **tagjainak**, a vízszintesen egymás mellett álló tagok együttesét a mátrix **sorainak**, a függőlegesen egymás alatt álló tagok együttesét a mátrix **oszlopainak** nevezzük. Ennek megfelelően az α_{ik} mátrixtag **sorindexe** i, **oszlopindexe** k.

Az azonos sor-és oszlopindexű tagok összességét a mátrix **főátlójának** hívjuk. A mátrix **mellékátlója** azokból a tagokból áll, amelyek sor-és oszlopindexének az összege $N+1$.

főátló ha $N < M$ főátló ha $N > M$

$$\begin{pmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \bullet & & & & & \\ & \bullet & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & \bullet & & \end{pmatrix},$$

mellékátló ha $N < M$ mellékátló ha $N > M$

$$\begin{pmatrix} & & & \bullet \\ & & \bullet & \\ & \bullet & & \\ \bullet & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & & & & & \bullet \\ & & & & \bullet & \\ & & & \bullet & & \\ & & \bullet & & & \end{pmatrix}.$$

Egy $N \times N$-es (úgynevezett négyzetes) mátrix **diagonális** ha a főátlón kívüli tagjai nullák. Az **egységmátrix** az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában mindenütt 1 áll.

11.3. A mátrixok mint lineáris leképezések adott vektoron felvett értékeinek kiszámítására szemléletes, jól kezelhető módszert találhatunk. Az itt meghonosodott szokásnak megfelelően írjuk $\mathbb{K}^N$ elemeit oszlop formába az $M \times N$-es mátrix mellé jobbra. A mátrix hatása a vektoron az a vektor ($\mathbb{K}^M$ eleme) lesz, amelynek i-edik tagját úgy kapjuk, hogy a mátrix i-edik sorát „összeszorozzuk” a vektorral, vagyis a mátrix i-edik sorának első tagját összeszorozzuk a vektor első tagjával, a sor második tagját a vektor második tagjával, és így tovább, majd az így kapott N darab szorzatot összeadjuk:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \cdots & \alpha_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots \alpha_{1N}\xi_N \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots \alpha_{2N}\xi_N \vdots \\ \alpha_{M1}\xi_1 + \alpha_{M2}\xi_2 + \ldots \alpha_{MN}\xi_N \end{pmatrix}.$$

Ezt a sémát **sor-oszlop** szorzásnak nevezzük.

Jegyezzük meg azt a fontos tényt, hogy egy márix k-adik oszlopa épp a k-adik standard bázisvektornak a mátrix (mint lineáris leképezés) általi képe.

11.4. $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^M)$ vektortér a pontonként értelmezett műveletekkel. $\mathbb{K}^{M\times N}$ ugyancsak vektortér a tagonként értelmezett műveletekkel. Könnyű meggyőződni arról, hogy a 11.1-ben értelmezett

$$\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^N) \equiv \mathbb{K}^{M\times N}, \qquad \boldsymbol{A} \equiv (\alpha_{ik} \mid i = 1, \ldots, M;\ k = 1, \ldots, N)$$

azonosítás lineáris, azaz ha

$$\boldsymbol{B} \equiv (\beta_{ik} \mid i = 1, \ldots, M;\ k = 1, \ldots, N),$$

akkkor

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \equiv (\alpha_{ik} + \beta_{ik} \mid i = 1, \ldots, M;\ k = 1, \ldots, N),$$

$$\alpha\boldsymbol{A} \equiv (\alpha\alpha_{ik} \mid i = 1, \ldots, M;\ k = 1, \ldots, N).$$

Továbbá, ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^M)$ és $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^K, \mathbb{K}^N)$, mátrix alakjuk olyan mint fenn, azzal a különbséggel, hogy $\boldsymbol{B}$-nél a sor- illetve oszlopindex N-ig illetve K-ig fut, akkor a 11.3-ban mondottak alapján egyszerű meggyőződni arról, hogy

$$\boldsymbol{AB} \equiv \left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik}\beta_{kj} \;\middle|\; i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, K \right).$$

Ennek megfelelően a fenti jobb oldalon álló mátrixot a két szóban forgó mátrix **szorzatának** mondjuk. Szemléletesen az

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \cdots & \alpha_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1K} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \alpha_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \cdots & \beta_{NK} \end{pmatrix}$$

mátrixszorzás eredménye az a mátrix, amelynek ij-edik tagja az első mátrix i-edik sorának és a második mátrix j-edik oszlopának a korábban ismertetett „összeszorzása”.

Érdemes megjegyezni, hogy választhattuk volna a $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^M) \equiv \mathbb{K}^{N\times M}$ azonosítást is. Ennek megjelenítésében a vektorokat sorba írnánk, és „oszlop-sor” szorzást használnánk a sor-oszlop szorzás helyett.

11.5. Egy kicsit módosíthatjuk a 11.1. $(*)$ formuláját, hogy általánosításra alkalmas képletet kapjunk. Minden $k = 1, \dots, N$ esetén megadhatjuk a

$$\mathrm{in}_k : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^N, \quad \xi \mapsto (0, 0, \dots, 0, \underset{(k)}{\xi}, 0, \dots, 0)$$

lineáris injekciót, amelyre $\mathrm{in}_k(1) = \boldsymbol{e}_k$. Mivel a $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ lineáris leképezések az 1×1-es mátrixok, azaz $\mathbb{K}$ elemei, láthatjuk, hogy $\boldsymbol{A}$ mátrixának ik-edik tagja, mint $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés

$$\alpha_{ik} = \mathrm{pr}_i \circ \boldsymbol{A} \circ \mathrm{in}_k$$

formában állítható elő.

Legyenek most $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_N$ vektorterek; ekkor

$$\mathrm{in}_k : \mathbf{V}_k \to \mathop{\times}_{j=1}^{N} \mathbf{V}_j, \quad \boldsymbol{x} \mapsto (0, 0, \dots, 0, \underset{(k)}{\boldsymbol{x}}, 0, \dots, 0)$$

lineáris injekció minden $k = 1, \dots, N$ esetén.

Ha $\mathbf{W}$ is vektortér és

$$\boldsymbol{A} : \mathop{\times}_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k \to \mathbf{W}$$

lineáris leképezés, akkor

$$\boldsymbol{A}_k := \boldsymbol{A} \circ \mathrm{in}_k : \mathbf{V}_k \to \mathbf{W} \qquad (k = 1, \dots, N)$$

lineáris leképezések, és ha ezeket sorba rendezzük, $\mathop{\times}_{i=1}^{N} \mathbf{V}_i$ elemeit pedig oszlopba, akkor a szokásos sor-oszlop szorzással számolhatunk:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N) = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}_k =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \dots & \boldsymbol{A}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix}.$$

A fent leírt hozzárendelés lineáris bijekció, amellyel a

$$\mathrm{Lin}\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N}\mathbf{V}_k,\mathbf{W}\right)\equiv\mathop{\times}_{k=1}^{N}\mathrm{Lin}(\mathbf{V}_k,\mathbf{W}),\qquad \boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{A}\circ\mathrm{in}_1,\dots,\boldsymbol{A}\circ\mathrm{in}_N)$$

azonosítást tesszük.

Továbbá, ha $\mathbf{W}_1,\dots,\mathbf{W}_M$ vektorterek,

$$\boldsymbol{A}:\mathop{\times}_{k=1}^{N}\mathbf{V}_k\to\mathop{\times}_{i=1}^{M}\mathbf{W}_i$$

lineáris leképezés, és szokásosan $\mathrm{pr}_i:\mathop{\times}_{l=1}^{M}\mathbf{W}_l\to\mathbf{W}_i$ a kanonikus projekció, akkor

$$\boldsymbol{A}_{ik}:=\mathrm{pr}_i\circ\boldsymbol{A}\circ\mathrm{in}_k:\mathbf{V}_k\to\mathbf{W}_i\qquad(i=1,\dots,M;\ k=1,\dots,N)$$

lineáris leképezések. Ha ezeket az előbbiek mintájára mátrixba rendezzük, a Descartes-szorzat elemeit oszlopba írjuk, akkor az $\boldsymbol{A}$ lineáris leképezés értékeinek a kiszámítására formailag ugyanúgy járhatunk el, mint $\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}^M$ esetén:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1N}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2N}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{M1}&\boldsymbol{A}_{M2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{MN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\vdots\\\boldsymbol{x}_N\end{pmatrix}.$$

Szokás az ilyen alakokat **blokk-mátrixnak** illetve **blokk-vektornak** nevezni. Ennek megfelelően tehát a

$$\mathrm{Lin}\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N}\mathbf{V}_k,\mathop{\times}_{i=1}^{M}\mathbf{W}_i\right)\equiv\mathop{\times}_{k=1}^{N}\mathop{\times}_{i=1}^{M}\mathrm{Lin}(\mathbf{V}_k,\mathbf{W}_i),$$

$$\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{A}_{ik}\mid i=1,\dots,M;\ k=1,\dots,N)$$

azonosítást tehetjük.

Megemlítjük, hogy $M=N$ esetén, ha $\boldsymbol{A}_i:\mathbf{V}_i\to\mathbf{W}_i$ lineáris leképezés, akkor

$$\mathop{\times}_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_i\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&0&\cdots&0\\0&\boldsymbol{A}_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\boldsymbol{A}_N\end{pmatrix}.$$

11.6. Sokszor jó hasznát vesszük az alábbi egyszerű tényeknek.

Legyen $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ vektortér. Az előzőek szerint minden $\mathbf{U}\times\mathbf{V}\to\mathbf{U}\times\mathbf{V}$ lineáris leképezés

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

alakú, ahol

$$\boldsymbol{A}:\mathbf{U}\to\mathbf{U}, \qquad \boldsymbol{B}:\mathbf{V}\to\mathbf{U}, \qquad \boldsymbol{C}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}, \qquad \boldsymbol{D}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}.$$

Egyszerű számolással győződhetünk meg arról hogy ha $\boldsymbol{A}$ bijektív, akkor (a szokásos sor-oszlop szorzást alkalmazva a blokk-mátrixokra is)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

ahol az identitások helyett $\mathbf{1}$-et írtunk.

Hasonlóan, ha $\boldsymbol{D}$ bijektív, akkor

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Ha a blokk-mátrix bijektív, akkor $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{D}$ bijektív, továbbá $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ és $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}$ is bijektív. Ha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ bijektív, vagy $\boldsymbol{D}$ és $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}$ bijektív, akkor a blokk-mátrix is bijektív.

11.7 Feladatok

1. Adjuk meg a 8.7.3 feladatban leírt lineáris leképezések (figyelem: nem mind az!) mátrixát!

2. Mutassuk meg, hogy az $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mátrix akkor és csak akkor injektív lineáris leképezés (tehát egyben izomorfizmus), ha $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ (lásd a 10.6.2. feladatot).

3. Igazoljuk, hogy a

$$\boldsymbol{\sigma}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

úgynevezett **Pauli-mátrixok** és a

$$\boldsymbol{\sigma}_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

egységmátrix bázist alkotnak $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben, mind izomorfizmusok, és

$$\boldsymbol{\sigma}_k^2 = \boldsymbol{\sigma}_0 \qquad (k=0,1,2,3),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = -\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 = i\boldsymbol{\sigma}_3, \quad \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 = -\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2 = i\boldsymbol{\sigma}_1, \quad \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1 = -\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3 = i\boldsymbol{\sigma}_2.$$

Következésképpen, ha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ akármilyen 2×2-es mátrix, akkor $(\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA})^2$ az egységmátrix számszorosa.

4. Egy $M \times N$-es mátrix k-adik oszlopa az a $\mathbb{K}^M$-beli vektor, amelybe a mátrix mint lineáris leképezés a $\mathbb{K}^N$ k-adik standard bázisvektorát képezi. Ebből következik, hogy a márix mint lineáris leképezés rangja (azaz képterének a dimenziója) a maximális lineárisan független oszlopainak a száma.

Ezen észrevétel alapján feleljünk a következő kérdésekre!

(i) Melyek injektívek a felsorolt mátrixok közül:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & i & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) α mely értékei mellett izomorfizmusok az alábbi mátrixok:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & i & 0 \\ i & \alpha & i \\ 0 & i & \alpha \end{pmatrix}.$$

5. A $\boldsymbol{P}_k : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N, \quad (\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto (0, \ldots, 0, \xi_k, 0, \ldots, 0) \quad (k = 1, \ldots, N)$ lineáris leképezés mátrixa olyan, hogy minden tagja nulla, a főátló k-adik tagját kivéve, amely 1.

Mutassuk meg, hogy ha $\boldsymbol{A}$ olyan $N \times N$-es mátrix, amelyre $\boldsymbol{AP}_k = \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{A}$ ($k = 1, \ldots, N$), akkor $\boldsymbol{A}$ diagonális.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $\boldsymbol{A}$ olyan $N \times N$-es mátrix, amely felcserélhető minden $N \times N$-es mátrixszal (azaz $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ minden $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{N \times N}$ esetén), akkor $\boldsymbol{A}$ az egységmátrix számszorosa. (Útmutatás: Vegyük azokat a $\boldsymbol{B}$ mátrixokat, amelyeknek csak egy tagja 1, a többi nulla.)

7. Legyen $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_M$ vektortér. Mutassuk meg, hogy a

$$\mathrm{Lin}\left(\mathbf{V}, \mathop{\times}_{i=1}^{M} \mathbf{W}_i\right) \equiv \mathop{\times}_{i=1}^{M} \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W}_i), \qquad \boldsymbol{A} \equiv (\mathrm{pr}_1 \circ \boldsymbol{A}, \ldots, \mathrm{pr}_M \circ \boldsymbol{A})$$

azonosítás helyénvaló (vagyis a formulának megfelelő hozzárendelés lineáris bijekciót határoz meg).

III. DUALITÁS

12. A duális tér

12.1. A lineáris leképezések közül különösen fontosak azok, amelyek egy vektortérből az alaptestbe képeznek.

Legyen $\mathbf{V}$ vektortér a $\mathbb{K}$ test fölött. Ekkor a következő jelöléseket és elnevezéseket használjuk:

$$\mathbf{V}^\star := \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$$

a **$\mathbf{V}$ duálisa**; $\mathbf{V}^\star$ elemeit **lineáris funkcionáloknak (formáknak)** vagy **kovektoroknak** hívjuk. A $\boldsymbol{p}$ kovektornak az $\boldsymbol{x}$ vektoron felvett értékét

$$(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})$$

jelöli (a függvényeknél megszokott $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$, a lineáris leképezéseknél megszokott $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}$ helyett). Ha hangsúlyozni akarjuk mely vektortér dualitási leképezéséről van szó, indexet írunk:

$$(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})_{\mathbf{V}}.$$

12.2. A duális tér egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy **szétválasztja** a vektortér pontjait, ami a következő tényen alapszik.

Állítás *Ha $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, akkor van olyan $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$, hogy $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) \neq 0$.*

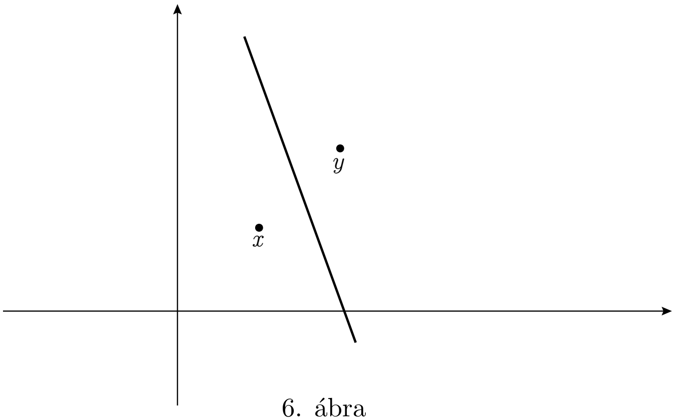
Bizonyítás Legyen B a $\mathbf{V}$-nek olyan bázisa, amely tartalmazza $\boldsymbol{x}$-et (ilyen van a 3.2.2. állítás szerint). Definiáljuk ezután $\boldsymbol{p}$-t úgy, hogy $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) := 1$ és $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y}) := 0$, ha $\boldsymbol{y} \in B \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ (lásd a 8.4. állítást). ■

Eredményünket más hasznos formában is megfogalmazzuk:

(i) ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ és $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) = 0$ minden $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ esetén, akkor $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;
(ii) ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, akkor van olyan $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$, hogy $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) \neq (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y})$;
(iii) ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ és $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y})$ minden $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ esetén, akkor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

A fenti egyenértékű állítások bármelyikére mint **szétválasztási tulajdonságra** fogunk hivatkozni. Tulajdonképpen (ii) mutatja, miért használjuk, ezt az elnevezést.

A szétválasztási tulajdonságot szemléletessé is tehetjük. Ha $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$, akkor $\mathrm{Ran}\boldsymbol{p}$ egy dimenziós, így 10.4. alapján $\mathrm{codim}(\mathrm{Ker}\boldsymbol{p}) = 1$, vagyis a 6.3. szerint $\mathrm{Ker}\boldsymbol{p}$ hipersík (altér). Ha $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ olyan, hogy $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) \neq (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y})$, akkor $\dfrac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2} + \mathrm{Ker}\boldsymbol{p}$ olyan hipersík, amely elválasztja egymástól a két vektort: $\boldsymbol{x}$ a hipersík ,,egyik oldalán" van, $\boldsymbol{y}$ a ,,másik oldalán": $0 \neq (\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}) = -(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{h})$ a hipersík minden $\boldsymbol{h}$ elemére. A mondottakat $\mathbb{R}^2$-ben a 6. ábra szemlélteti.



6. ábra

A szétválasztási tulajdonság egy sokat használt következménye, hogy ha $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad (\boldsymbol{f}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f}|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})$$

minden $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^\star$ és $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén.

12.3. Rögzített $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén a

$$\mathbf{V}^\star \to \mathbb{K}, \quad \boldsymbol{p} \mapsto (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})$$

leképezés lineáris (az $\boldsymbol{x}$ pontbeli kiértékelés). Ez azt jelenti, hogy minden $\boldsymbol{x}$ vektorhoz megadható a $\mathbf{V}^\star$ egy lineáris funkcionálja, azaz $(\mathbf{V}^\star)^\star =: \mathbf{V}^{\star\star}$ egy eleme. Más szóval adott egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{\star\star}$ leképezés, amelyet

$$(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{p}) := (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}, \boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star)$$

jellemez. Igen egyszerű megmutatni, hogy $\boldsymbol{L}$ lineáris; például, ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$, akkor minden $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ esetén

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|\boldsymbol{p}) &= (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{p}) = \\ &= (\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{p}),\end{aligned}$$

azaz $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y})$, hiszen az egyenlőség két oldalán álló leképezések minden pontban ugyanazt az értéket veszik fel.

$\mathbf{V}^\star$ szétválasztó tulajdonsága miatt $\boldsymbol{L}$ injektív; ugyanis ha $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, akkor minden $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ esetén $0 = (\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})$, tehát $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, azaz $\mathrm{Ker}\boldsymbol{L} = \{\mathbf{0}\}$.

Az $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{\star\star}$ lineáris injekció annyira természetes, hogy általa azonosítjuk $\mathbf{V}$-t a $\mathbf{V}^{\star\star}$ egy alterével. Más szóval, az $\boldsymbol{L}$ jelölést elhagyjuk, az $\boldsymbol{x}$ egy elemét $\mathbf{V}^{\star\star}$ elemének is tekintjük:

$$\mathbf{V} \Rrightarrow \mathbf{V}^{\star\star}, \qquad (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{p})_{\mathbf{V}^\star} := (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})_{\mathbf{V}} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}, \boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star).$$

12.4. Definíció *Legyen* $\{\boldsymbol{v}_i \mid i \in I\}$ *a* $\mathbf{V}$ *vektortér bázisa. Ekkor a*

$$(\boldsymbol{p}_i|\boldsymbol{v}_j) := \begin{cases} 1 & \textit{ha} \quad i = j, \\ \\ 0 & \textit{ha} \quad i \neq j \end{cases} \qquad (i, j \in I)$$

formulával meghatározott $\{\boldsymbol{p}_i \mid i \in I\} \subset \mathbf{V}^\star$ *halmazt az adott bázis* ***duálisának*** *nevezzük.*

$\boldsymbol{p}_i$ tehát az a lineáris funkcionál, amely a $\boldsymbol{v}_i$ bázisvektoron 1-et vesz fel, a többin nullát.

Állítás *(i) Egy bázis duálisa lineárisan független halmaz.*
(ii) Ha $\mathbf{V}$ *véges dimenziós, akkor bármely bázisának duálisa bázis* $\mathbf{V}^\star$*-ban.*

Bizonyítás Használjuk az előző definíció jelöléseit.

(i) Tegyük fel, hogy az I valamely F véges részhalmazára és α_i $(i \in F)$ számokra $\sum\limits_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{p}_i = \mathbf{0}$; ekkor minden $j \in F$ esetén

$$0 = \left(\sum_{i \in F} \alpha_i \boldsymbol{p}_i \,\middle|\, \boldsymbol{v}_j \right) = \sum_{i \in F} \alpha_i (\boldsymbol{p}_i|\boldsymbol{v}_j) = \alpha_j.$$

(ii) Legyen $N := \dim\mathbf{V}$. Ekkor bármely kovektor a $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N$ kovektorok lineáris kombinációja:

$$\boldsymbol{p} = \sum_{k1}^{N} (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v}_k)\boldsymbol{p}_k \qquad (\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star) \tag{$*$}$$

E formula helyességéről úgy győződhetünk meg, hogy megmutatjuk, az egyenlőség két oldalán álló lineáris funckionálok ugyanazt az értéket veszik fel a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ bázisvektorokon. ■

Következésképpen

$$\dim\mathbf{V}^\star = \dim\mathbf{V},$$

amit lehet tovább vinni: $\dim\mathbf{V}^{\star\star} = \dim\mathbf{V}^\star$. Ennek különösen véges dimenziós vektorterek esetén van jelentősége. Ugyanis ekkor $\mathbf{V}$ a $\mathbf{V}^{\star\star}$-nak olyan lineáris altere (az előző pont szerinti azonosításban), hogy a dimenziójuk megegyezik, azaz maguk is megegyeznek. Tehát

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}^{\star\star} \quad \text{ha} \quad \dim\mathbf{V} < \infty.$$

Fontos megjegyezni, hogy ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor $\mathbf{V}$ és $\mathbf{V}^\star$ izomorfak, mert a dimenziójuk ugyanaz; általában azonban nem azonosíthatók (nincs köztük kitüntetett izomorfizmus), csak egyes speciális esetekben, amelyekről később lesz szó.

A $(*)$ formula gyakran felbukkan alkalmazásokban, és még inkább annak „duálisa":

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_k \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}). \tag{$**$}$$

Ez következik a $(*)$ formulából, hiszen $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N\}$ duálisa $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N\}$, tehát felcserélhetjük a szerepüket; közevetlenül is beláthatjuk a $(**)$ egyenlőséget azzal, hogy megmutatjuk, az egyenlőség két oldalán álló vektorokon a $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N$ báziskovektorok ugyanazt az értéket veszik föl, amiből következik, hogy minden kovektor ugyanazt az értéket veszi fel, tehát a szétválasztási tulajdonság miatt a két oldal egyenlő.

Végül vegyük észre, hogy

$$(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v}_k)(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star, \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}).$$

12.5. Lássunk néhány példát vektortér duálisára!

(i) $\mathbb{K}^N$ duálisát azonosíthatjuk $\mathbb{K}^N$-nel, hiszen a 11. fejezet alapján $(\mathbb{K}^N)^\star = \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}^{1\times N} = \mathbb{K}^N$. Eszerint $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{K}^N$ a $\boldsymbol{\xi} \mapsto (\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \xi_i$ lineáris funkcionálnak felel meg.

A standard bázis duálisa ebben az azonosításban önmaga (részletesebben lásd a 15. fejezetben).

(ii) Ha T nem üres halmaz, $\mathbb{K}^T$ (vagyis a $T \to \mathbb{K}$ függvények vektortere) duálisának eleme minden $t \in T$ esetén a t-beli kiértékelés: $\delta_t : \mathbb{K}^T \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(t)$. A $\{\delta_t \mid t \in T\}$ halmaz lineárisan független, de nem bázis, ha T nem véges halmaz. Vegyük ugyanis az olyan függvényeket, amelyek csak véges sok pontban nem nullák: $\mathbb{K}^{(T)} := \{f : T \to \mathbb{K} \mid f(t) = 0 \text{ véges sok } t \text{ kivételével}\}$. Ilyen függvényekre jelentse $\sum f$ a függvény értékeinek az összegét. Igen könnyű látni, hogy $f \mapsto \sum f$

lineáris funckionál $\mathbb{K}^{(T)}$-n. Terjesszük ki $\mathbb{K}^T$-re úgy, hogy legyen nulla a $\mathbb{K}^{(T)}$ egy kiegészítőjén. $(\mathbb{K}^T)^\star$-nak ez az eleme nincs benne a kiértékelő funkcionálok kifeszítette altérben.

(iii) Emlékezzünk az $\boldsymbol{e}_n$ bázisvektorokra $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-ben (lásd 3.4.(iii)). Ha $\boldsymbol{p} \in (\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})^\star$, akkor $((\boldsymbol{p}|\boldsymbol{e}_n) \mid n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$. Ha viszont $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$, akkor $\boldsymbol{e}_n \mapsto \pi_n$ lineáris funkcionált határoz meg $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-en. Végülis tehát a

$$\mathbb{K}^\mathbb{N} \equiv \left(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\right)^\star, \quad (\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{\xi}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \pi_n \xi_n \quad (\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})})$$

azonosítást tehetjük (az itt szereplő összeg értelmes, mert valójában csak véges sok számot kell összeadnunk).

Az előző példával összevetve, itt $\delta_n = \mathrm{pr}_n$, az n-edik kanonikus projekció, amely a fenti azonosításban éppen $\boldsymbol{e}_n$; az ezektől lineárisan független ott megadott funckionál itt az azonosan 1 sorozat $\mathbb{K}^\mathbb{N}$-ben.

$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ tehát valódi altere a saját duálisának. Jegyezzük meg azt a fontos tényt is, hogy már $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ is szétválasztja $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ elemeit: ha $(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\xi}) = 0$ minden $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ esetén, akkor $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, hiszen vehetjük az $\eta_n := \xi_n^*$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot.

(iv) Az előző példa szerint találtunk egy olyan $\mathbf{V}$ vektorteret, amely valódi altere $\mathbf{V}^\star$-nak. Legyen $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ egy kiegészítője $\mathbf{V}^\star$-ban. Vegyük az $\mathbf{U}$ egy nem nulla $\boldsymbol{p}$ elemét; a $\boldsymbol{p} : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ lineáris funcionált terjesszük ki $\mathbf{V}^\star$-ra úgy, hogy $\mathbf{U}$-n legyen nulla. Ez olyan eleme $\mathbf{V}^{\star\star}$-nak, amely nincs benne $\mathbf{V}$-ben, tehát példát hoztunk arra, hogy $\mathbf{V}$ valódi altere $\mathbf{V}^{\star\star}$-nak.

12.6. Az előző pont első példájának általánosításaként 11.5. alapján sokszor használjuk a

$$\left(\mathop{\times}_{i=1}^{N} \mathbf{V}_i\right)^\star \equiv \mathop{\times}_{i=1}^{N} \mathbf{V}_i^\star,$$

azonosítást, amelyet a következő formula határoz meg: ha

$$(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N) \in \mathop{\times}_{i=1}^{N} \mathbf{V}_i^\star, \qquad (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \in \mathop{\times}_{i=1}^{N} \mathbf{V}_i,$$

akkor

$$\big((\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)|(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)\big) := \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{p}_i|\boldsymbol{x}_i).$$

12.7. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy a polinomok $\mathbf{P}$ vektorterének a duálisa $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$-val azonosítható úgy, hogy az $\boldsymbol{f} : \mathbf{P} \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionálnak az $((\boldsymbol{f}|\mathrm{id}_\mathbb{K}^n) \mid n \in \mathbb{N}_0)$ sorozatot feleltetjük meg.

2. Az előbbi feladat alapján adjuk meg az $\{\mathrm{id}_\mathbb{K}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ bázis duálisát!

3. Legyen $\boldsymbol{x}$ a $\mathbf{V}$ vektortér nem nulla eleme, $\alpha \in \mathbb{K}$. Igazoljuk, hogy van olyan $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$, amelyre $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) = \alpha$ teljesül.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{M}$ a nullán átmenő hipersík, akkor van olyan szám szorzó erejéig egyértelműen meghatározott $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$, hogy $\mathbf{M} = \mathrm{Ker}\boldsymbol{p}$.

5. Legyen $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbf{V}^\star$ és $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Milyen feltétel mellett létezik $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ úgy, hogy $(\boldsymbol{p}_i|\boldsymbol{x}) = \alpha_i$ $(i = 1, \dots, m)$?

6. Legyen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$, és teljesüljön az, hogy ha $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ és $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) = 0$, akkor $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y}) = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan α szám, amellyel $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$.

7. Bizonyítsuk be, hogy $R \subset \mathbf{V}^\star$ akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $\boldsymbol{p} \in R$ és véges $L \subset R \setminus \{\boldsymbol{p}\}$, hogy $\mathrm{Ker}\boldsymbol{p} \supset \bigcap\limits_{\boldsymbol{p}' \in L} \mathrm{Ker}\boldsymbol{p}'$.

8. Értelmezzük a $\mathbf{V}$ vektortér nem üres H részhalmazának **annullátorát** a

$$H^0 := \{\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star \mid H \subset \mathrm{Ker}\boldsymbol{p}\}$$

formulával. Bizonyítsuk be, hogy
(i) H^0 lineáris altér $\mathbf{V}^\star$-ban,
(ii) $H^0 = (\mathrm{Span}H)^0$,
(iii) $\mathrm{Span}H \subset (H^0)^0$, és ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor egyenlőség áll,
(iv) ha $\mathbf{M}$ lineáris altér $\mathbf{V}$ ben, akkor $\dim\mathbf{M} + \dim\mathbf{M}^0 = \dim\mathbf{V}$.

13. Egy rangú lineáris leképezések

13.1. Legyen $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ vektortér, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$, $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}$. Vezessük be az

$$\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}, \quad \boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}$$

jelölést.

Nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p}$ lineáris leképezés, amely pontosan akkor nulla, ha $\boldsymbol{w}$ vagy $\boldsymbol{p}$ nulla. Ha $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$, akkor értékkészlete $\mathbb{K}\boldsymbol{w}$, az $\boldsymbol{w}$ kifeszítette lineáris altér, vagyis a rangja egy. Igen fontos eredmény, hogy minden egy rangú lineáris leképezés ilyen alakú.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ egy rangú lineáris leképezés. Ekkor létezik $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ és $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{w} \in \mathbf{W}$ úgy, hogy $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p}$. Továbbá, ha $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w}' \otimes \boldsymbol{p}'$, akkor van olyan nem nulla α szám, hogy $\boldsymbol{p}' = \dfrac{1}{\alpha}\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{w}' = \alpha\boldsymbol{w}$.*

Bizonyítás Legyen $\boldsymbol{w}$ olyan vektor $\mathbf{W}$-ban, amely kifeszíti $\boldsymbol{A}$ értékkészletét. Vegyük az $\boldsymbol{f} : \mathbb{K}\boldsymbol{w} \to \mathbb{K}$, $\alpha\boldsymbol{w} \mapsto \alpha$ lineáris funkcionált. Bármely $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ az $\boldsymbol{w}$-nak $\boldsymbol{x}$-től függő $\alpha_{\boldsymbol{x}}$ számszorosa: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \alpha_x\boldsymbol{w}$; világos, hogy $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \alpha_{\boldsymbol{x}}$. Legyen $\boldsymbol{p} := \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{A}$. Ekkor a $\mathbf{V}$ minden $\boldsymbol{x}$ elemére $(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\boldsymbol{w} = \alpha_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, ést ezt akartuk bizonyítani.

Az olvasóra bízzuk, lássa be azt az egyszerű tényt, hogy $\boldsymbol{w}$ és $\boldsymbol{p}$ egy szám szorzó illetve osztó erejéig egyértelmű. ■

Megjegyezzük, hogy $\mathbf{V} = \mathbb{K}^N$, $\mathbf{W} = \mathbb{K}^M$ esetén $\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p}$ az az objektum, amelyet olykor a $\boldsymbol{w}$ és $\boldsymbol{p}$ diadikus szorzatának hívnak (lásd 15.5.).

13.2. Állítás *Legyen* $\{\boldsymbol{w}_i \mid i \in I\}$ *és* $\{\boldsymbol{p}_k \mid k \in K\}$ *lineárisan független halmaz* $\mathbf{W}$*-ben illetve* $\mathbf{V}^\star$*-ban. Ekkor*

$$\{\boldsymbol{w}_i \otimes \boldsymbol{p}_k \mid i \in I, k \in K\} \subset \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$$

lineárisan független.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy F az I-nek, G a K-nak véges részhalmaza és α_{ik} $(i \in F, k \in G)$ olyan számok, hogy

$$\sum_{i\in F}\sum_{k\in G} \alpha_{ik}\boldsymbol{w}_i \otimes \boldsymbol{p}_k = \mathbf{0}.$$

Ekkor minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén

$$\mathbf{0} = \left(\sum_{i\in F}\sum_{k\in G} \alpha_{ik}\boldsymbol{w}_i \otimes \boldsymbol{p}_k\right)\boldsymbol{x} = \sum_{i\in F}\sum_{k\in G} \alpha_{ik}(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}_i =$$
$$= \sum_{i\in F}\left(\sum_{k\in G} \alpha_{ik}(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{w}_i,$$

így a $\boldsymbol{w}_i$-k függetlensége miatt

$$\sum_{k\in G} \alpha_{ik}(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (i \in F).$$

Mivel ez minden $\boldsymbol{x}$-re igaz, az $\boldsymbol{x}$-et kiemelve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k\in G} \alpha_{ik}\boldsymbol{p}_k = \mathbf{0} \qquad (i \in F),$$

amiből most már a $\boldsymbol{p}_k$-k függetlensége miatt $\alpha_{ik} = 0$ minden $i \in F$ és $k \in G$ esetén.

13.3. Állítás *Legyen* $\{\boldsymbol{w}_i \mid i = 1, \dots, M\}$ *bázis* $\mathbf{W}$*-ben és* $\{\boldsymbol{p}_k \mid k = 1, \dots, N\}$ *bázis* $\mathbf{V}^\star$*-ban. Ekkor*

$$\{\boldsymbol{w}_i \otimes \boldsymbol{p}_k \mid i = 1, \dots, M;\ k = 1, \dots, N\}$$

bázis $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$*-ban.*

Bizonyítás Emlékezzünk, hogy véges dimenziós vektortérről lévén szó, $\mathbf{V}^{\star\star} \equiv \mathbf{V}$. Ezért a 12.4. állítás szerint a fent adott bázisok duálisa bázis $\mathbf{W}^\star$-ban illetve $\mathbf{V}$-ben; jelölje ezeket $\{\boldsymbol{f}_i \mid i = 1, \dots, M\}$ illetve $\{\boldsymbol{v}_k \mid k = 1, \dots, N\}$. Ekkor

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{f}_i | \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k) \boldsymbol{w}_i \otimes \boldsymbol{p}_k.$$

E formula helyességéről úgy győződhetünk meg, hogy megmutatjuk, az egyenlőség két oldalán álló lineáris leképezések ugyanazt az értéket veszik föl a $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N$ bázisvektorokon:

$$\left(\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{f}_i | \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k) \boldsymbol{w}_i \otimes \boldsymbol{p}_k \right) \boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{f}_i | \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k)(\boldsymbol{p}_k | \boldsymbol{v}_j) \boldsymbol{w}_i = $$
$$= \sum_{i=1}^{M} (\boldsymbol{f}_i | \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j) \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j.$$

Itt felhasználtuk, hogy $(\boldsymbol{p}_i | \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$, valamint értelemszerűen alkalmaztuk a 12.4. $(**)$ összefüggését. ■

Említsük meg azt a fontos speciális esetet, amikor $\mathbf{W} = \mathbf{V}$. Ha $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N\}$ bázis $\mathbf{V}$-ben és $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N\}$ ennek a duálisa, akkor $\{\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{p}_k \mid i, k = 1, \dots, N\}$ bázis $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$-ben.

13.4. (i) Az előző két állítás következménye, hogy ha a $0 \cdot \infty := 0$ megállapodással élünk, akkor

$$\dim(\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})) = (\dim \mathbf{V})(\dim \mathbf{W}).$$

Véges dimenziós vektorterek esetére ezt már korábban is megállapíthattuk volna, ugyanis $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^M) \equiv \mathbb{K}^{M \times N}$, azaz a $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$ lineáris leképezések dimenziója MN, és bármely N illetve M dimenziós vektortér izomorf $\mathbb{K}^N$-nel illetve $\mathbb{K}^M$-mel, és tudjuk, hogy a lineáris szerkezettel kapcsolatos állítások izomorf vektorterekre egyszerre érvényesek.

(ii) Egy rangú lineáris leképezések lineáris kombinációja véges rangú; ezért, ha mind $\mathbf{V}$ mind $\mathbf{W}$ végtelen dimenziós, akkor a 13.3. állítás (értelemszerű átfogalmazással) nem igaz. Ugyanis ekkor van olyan $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés, amelynek a rangja végtelen; ilyet például úgy adhatunk meg, hogy a $\mathbf{V}$ egy bázisának megszámlálható eleméhez hozzárendeljük a $\mathbf{W}$ egy bázisának megszámlálható (különböző) elemét, az esetleg fennmaradó többi bázisvektorhoz pedig nullát rendelünk.

Ezzel szemben, ha $\mathbf{V}$ vagy $\mathbf{W}$ közül az egyik véges dimenziós, igaz marad a 13.3. állítás; kérjük az olvasót, bizonyítsa ezt be.

13.5. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ rangja m, akkor vannak $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ lineárisan fügetlen vektorok $\mathbf{W}$-ban, és $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ lineárisan független vektorok $\mathbf{V}^\star$-ban úgy, hogy $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w}_i \otimes \boldsymbol{p}_i$. (Útmutatás: legyen $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ a $\mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$ egy bázisa, $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ ennek a duálisa, és $\boldsymbol{p}_i := \boldsymbol{f}_i \circ \boldsymbol{A}$.)

2. Bizonyítsuk be, hogy
(i) rögzített $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}$ esetén $\mathbf{V}^\star \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, $\boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p}$,
(ii) rögzített $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ esetén $\mathbf{W} \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, $\boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p}$
lineáris leképezések!

3. Legyen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbf{V}^\star$, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. Igazoljuk, hogy
(i) $(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p})(\boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y})\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{q}$ (a bal oldalon a lineáris leképezések szorzata azaz kompozíciója áll),
(ii) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{p}$.

4. Legyen $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$ bázis $\mathbf{V}$-ben és $\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ ennek a duálisa. Mutassuk meg a 12.4 formulái alapján, hogy

$$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}_k \otimes \boldsymbol{p}_k = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}, \qquad \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{p}_k \otimes \boldsymbol{v}_k = \mathrm{id}_{\mathbf{V}^\star}.$$

5. Mutassuk meg, hogy ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ rangja egy, akkor
(i) van olyan $\alpha \in \mathbb{K}$, hogy $\boldsymbol{A}^2 = \alpha \boldsymbol{A}$,
(ii) ha $\alpha \neq 1$, akkor $\mathrm{id}_{\mathbf{V}} - \boldsymbol{A}$ izomorfizmus.

6. Legyen $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$. Igazoljuk, hogy
(i) ha $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) \neq 0$, akkor $\dfrac{\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}}{(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})}$ a $\mathrm{Ker}\boldsymbol{p}$ mentén az $\mathbb{K}\boldsymbol{x}$-re való vetítés;
(ii) ha $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) \neq 1$, akkor – és csak akkor – $\mathrm{id}_{\mathbf{V}} - \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}$ izomorfizmus és

$$(\mathrm{id}_{\mathbf{V}} - \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p})^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}} + \frac{\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}}{1 - (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})}.$$

7. Legyen $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(V)$ olyan, hogy felcserélhető minden $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezéssel (azaz $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ minden $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ esetén). Bizonyítsuk be, hogy ekkor van olyan α szám, amellyel $\boldsymbol{A} = \alpha \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$. (Útmutatás: vegyük $\boldsymbol{B}$ szerepére az $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}$ leképezéseket, és számítsuk ki $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$-nek és $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$-nak az $\boldsymbol{y}$ helyen felvett értékeit, ahol $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ és $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ tetszőleges.)

8. Legyen $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$ bázis $\mathbf{V}$-ben és $\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ ennek a duálisa. Igazoljuk, hogy

$$\left\{ \mathrm{id}_{\mathbf{V}} - \frac{\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{p}_k}{2} \mid i, k = 1, \ldots, N \right\}$$

olyan bázis $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$-ben, amely csupa izomorfizmusból áll. Milyen más szám tehető még $\dfrac{1}{2}$ helyébe, hogy igaz maradjon az állítás?

9. Az előző két feladat eredményeire támaszkodva bizonyítsuk be, hogy ha $\dim\mathbf{V} < \infty$, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, és $\boldsymbol{TA} = \boldsymbol{AT}$ minden $\boldsymbol{T} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ izomorfizmus esetén, akkor $\boldsymbol{A}$ az $\mathrm{id}_{\mathbf{V}}$ számszorosa.

14. Transzponáltak

14.1. Egy lineáris funckionált lineáris leképezéssel komponálva ismét lineáris funckionált kapunk. Úgy is felfoghatjuk, hogy egy lineáris leképezés a vele való komponálással ,,transzformálja" a lineáris funkcionálokat.

Definíció *Az* $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképezés* ***transzponáltja*** *az*

$$\boldsymbol{A}^\star : \mathbf{W}^\star \to \mathbf{V}^\star, \quad \boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{A}$$

leképezés.

A transzponált leképezést az

$$(\boldsymbol{A}^\star \boldsymbol{f} | \boldsymbol{x})_{\mathbf{V}} = (\boldsymbol{f} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_{\mathbf{W}} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}, \boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^\star)$$

egyenlőség jellemzi.

Ezekből a formulákból világos, hogy Aa lineáris leképezés.

Csak a fenti definíciót kell alkalmaznunk, hogy könnyedén bebizonyítsuk az alábbi kijelentéseket.

Állítás *Legyen* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

(i) Ha $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, *akkor*

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^\star = \boldsymbol{A}^\star + \boldsymbol{B}^\star.$$

(ii) Ha $\alpha \in \mathbb{K}$, *akkor*

$$(\alpha\boldsymbol{A})^\star = \alpha\boldsymbol{A}^\star.$$

(iii) Ha $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{W}, \mathbf{V})$, *akkor*

$$(\boldsymbol{AB})^\star = \boldsymbol{B}^\star\boldsymbol{A}^\star.$$

(iv) $(\mathrm{id}_{\mathbf{V}})^\star = \mathrm{id}_{\mathbf{V}^\star}$.

(v) Ha $\boldsymbol{A}$ *bijekció, akkor* $\boldsymbol{A}^\star$ *is az, és*

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^\star = (\boldsymbol{A}^\star)^{-1}. \blacksquare$$

Csak az utolsóhoz fűzünk egy kis eligazítást: az $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$ egyenlőségből (iii) és (iv) szerint $(\boldsymbol{A}^{-1})^\star \boldsymbol{A}^\star = \boldsymbol{A}^\star (\boldsymbol{A}^{-1})^\star = \mathrm{id}_{\mathbf{V}^\star}$ adódik.

Az első két összefüggés azt jelenti, hogy a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{W}) \to \mathrm{Lin}(\mathbf{W}^\star,\mathbf{V}^\star)$, $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}^\star$ leképezés lineáris. Következésképpen a nulla-leképezés transzponáltja is a nulla-leképezés (ami persze közvetlenül is azonnal látható).

14.2. Ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{W})$, akkor $\boldsymbol{A}^\star \in \mathrm{Lin}(\mathbf{W}^\star,\mathbf{V}^\star)$, és $\boldsymbol{A}^{\star\star} := (\boldsymbol{A}^\star)^\star \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^{\star\star}.\mathbf{W}^{\star\star})$. Minthogy $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}^{\star\star}$ és $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}^{\star\star}$, az $\boldsymbol{A}$ lineáris leképezés felfogható egy lineáris altéren értelmezett $\mathbf{V}^{\star\star} \rightarrowtail \mathbf{W}^{\star\star}$ lineáris leképezésnek. Így értelmes az alábbi állítás.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{W})$; ekkor*

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}^{\star\star},$$

és ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\star\star}.$$

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V} \subset \mathbf{V}^{\star\star}$, $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^\star$, akkor

$$(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{A}^{\star\star}\boldsymbol{x})_{\mathbf{W}} = (\boldsymbol{A}^{\star\star}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{f})_{\mathbf{W}^\star} = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{f})_{\mathbf{V}^\star} = (\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{f}|\boldsymbol{x})_{\mathbf{V}} = (\boldsymbol{f}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_{\mathbf{W}}.$$

A 12.2. végén levő megjegyzés alapján ez igazolja az állítás első részét; a második rész a $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\star\star}$ szerint teljesül. ■

Állításunk egyszerű de fontos következménye, hogy ha $\boldsymbol{A}^\star = \mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$; más szóval a transzponálás, az $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}^\star$ leképezés injektív. Ezért véges dimenziós vektorterek esetén a transzponálás egyben szürjektív is (hiszen $\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ és $\mathrm{Lin}(\mathbf{W}^\star,\mathbf{V}^\star)$ dimenziója megegyezik), azaz izomorfizmus. Végtelen dimenzió esetén ez nem szükségképpen igaz; példát a 12.5. (iii) és (iv) alapján hozhatunk. Van olyan $\mathbf{V}$ vektortér, amely valódi lineáris altere $\mathbf{V}^\star$-nak, és már $\mathbf{V}$ is szétválasztja $\mathbf{V}$ elemeit. Terjesszük ki $\mathrm{id}_{\mathbf{V}}$-t $\boldsymbol{F} : \mathbf{V}^\star \to \mathbf{V}^\star$ lineáris leképezéssé úgy, hogy legyen nulla a $\mathbf{V}$ egy kiegészítőjén. Tegyük fel, hogy valamely $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezésre $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}^\star$. Ekkor minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén $(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{F}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$, amiből $\boldsymbol{A} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$ következik; így $\boldsymbol{A}^\star = (\mathrm{id}_{\mathbf{V}})^\star = \mathrm{id}_{\mathbf{V}^\star} \neq \boldsymbol{F}$, ami ellentmondás.

14.3. **Állítás** *Az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés pontosan akkor szürjektív, ha $\boldsymbol{A}^\star$ injektív.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{A}$ szürjektív és $\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Ekkor

$$0 = (\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{f}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \qquad (*)$$

minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén. Mivel $\mathbf{W}$ minden eleme előáll $\boldsymbol{Ax}$ alakban, ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, azaz $\boldsymbol{A}^\star$ injektív.

Ha $\boldsymbol{A}$ nem szürjektív, akkor $\mathbf{W} \neq \{\mathbf{0}\}$ és van olyan $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^\star$, hogy $\boldsymbol{f}|_{\mathrm{Ran}\boldsymbol{A}} = \mathbf{0}$ (lásd a 8.7.6. feladatot). Erre az $\boldsymbol{f}$-re és minden $\mathbf{V}$-beli $\boldsymbol{x}$-re fennál a $(*)$ egyenlőség, ami azt jelenti most, hogy $\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, tehát $\boldsymbol{A}^\star$ nem injektív. ■

Tovább lépve megállapíthatjuk, hogy $\boldsymbol{A}^\star$ pontosan akkor szürjektív, ha $\boldsymbol{A}^{\star\star}$ injektív. Mivel $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}^{\star\star}$, azt is állíthatjuk, hogy ha $\boldsymbol{A}^\star$ szürjektív, akkor $\boldsymbol{A}$ injektív (viszont $\boldsymbol{A}$ injektivitásából nem következik szükségképpen $\boldsymbol{A}^{\star\star}$ injektivitása, így $\boldsymbol{A}^\star$ szürjektivitása sem). Ha viszont $\dim\mathbf{V} < \infty$, akkor az is igaz, hogy $\boldsymbol{A}^\star$ pontosan akkor szürjektív, ha $\boldsymbol{A}$ injektív.

14.4. Érdekes és fontos az egy rangú lineáris leképezések transzponáltja. Megmutatjuk, hogy

$$(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p})^\star = \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{w} \qquad (\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}, \boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star),$$

aminek úgy van értelme, hogy $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}^{\star\star}$, tehát a jobb oldalt $\mathbf{W}^\star \to \mathbf{V}^\star$ lineáris leképezésnek tekinthetjük. Valóban, minden $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^\star$ és $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén

$$\begin{aligned}\big((\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p})^\star \boldsymbol{f}|\boldsymbol{x}\big)_{\mathbf{V}} &= \big(\boldsymbol{f}|(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p})\boldsymbol{x}\big)_{\mathbf{W}} = (\boldsymbol{f}|\boldsymbol{w})_{\mathbf{W}}(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})_{\mathbf{V}} = (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{f})_{\mathbf{W}^\star}(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})_{\mathbf{V}} = \\ &= \big((\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{w})\boldsymbol{f}|\boldsymbol{x})_{\mathbf{V}}.\end{aligned}$$

14.5. Definíció *Az* $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ *lineáris leképezést* ***szimmetrikusnak*** *illetve* ***antiszimmetrikusnak*** *nevezzük, ha minden* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ *esetén*

$$(\boldsymbol{Ax}|\boldsymbol{y})_{\mathbf{V}} = (\boldsymbol{Ay}|\boldsymbol{x})_{\mathbf{V}} = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{Ay})_{\mathbf{V}^\star},$$

illetve

$$(\boldsymbol{Ax}|\boldsymbol{y})_{\mathbf{V}} = -(\boldsymbol{Ay}|\boldsymbol{x})_{\mathbf{V}} = -(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{Ay})_{\mathbf{V}^\star}.$$

Mivel $\boldsymbol{A}^\star : \mathbf{V}^{\star\star} \to \mathbf{V}^\star$, a fenti egyenlőségek azt mondják, hogy $\boldsymbol{A}^\star$ leszűkítése $\mathbf{V}$ re éppen $\boldsymbol{A}$ illetve $-\boldsymbol{A}$; más szóval,

$$\boldsymbol{A} \quad \text{pontosan akkor szimmetrikus, ha} \quad \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}^\star,$$

$$\boldsymbol{A} \quad \text{pontosan akkor antiszimmetrikus, ha} \quad -\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}^\star.$$

Természetesen, ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor egyenlőség áll:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\star, \quad \text{illetve} \quad -\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\star.$$

Általában az $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\star)$ **szimmetrikus** illetve **antiszimmetrikus része**

$$\boldsymbol{S} := \frac{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\star}{2}, \quad \text{illetve} \quad \boldsymbol{H} := \frac{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\star}{2}.$$

Ezek szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ leképezések, és

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{A}^\star|_{\mathbf{V}} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{H}.$$

Jegyezzük meg jól, hogy $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezésre *nem értelmezhető a szimmetrikusság és antiszimmetrikusság* fogalma; viszont $\mathbf{V}^\star \to \mathbf{V}$ lineáris leképezésekre igen, hasonlóan az előzőhöz.

14.6. Feladatok

1. Adjuk meg a polinomok vektorterén a differenciálás, a polinommal való szorzás és az integrálás transzponáltját (lásd 8.2.(vii), 8.7.1 és 12.7.1.).

2. Mi az

$$\boldsymbol{R} : \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \quad (\boldsymbol{R\xi})_n := \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad n = 1, \\ \xi_{n-1} & \text{ha} \quad n > 1 \end{cases}$$

jobbra tolás transzponáltja (lásd 12.5(iii))?

3. Legyen $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ és $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. Igazoljuk, hogy

$$(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{A}^\star \boldsymbol{p}.$$

4. Mutassuk meg (lásd az annullátor 12.7.8. feladatban bevezetett fogalmát), hogy az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezésre
(i) $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}^\star = (\mathrm{Ran}\boldsymbol{A})^0$,
(ii) $(\mathrm{Ker}\boldsymbol{A})^0 = \mathrm{Ran}\boldsymbol{A}^\star$.

5. Értelmezzük az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ konjugált lineáris leképezés transzponáltját az $(\boldsymbol{A}^\star \boldsymbol{f}|\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{f}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^*$ $(\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^\star, \boldsymbol{x} \in \mathbf{V})$ formulával. Igazoljuk, hogy $\boldsymbol{A}^\star$ konjugált lineáris. Melyek érvényesek most is a 14.1. állítás összefüggései közül?

6. Ha $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris bijekció, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ és $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}) \neq 1$, akkor – és csak akkor – $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}$ is bijekció, és

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} + \frac{(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}) \otimes (\boldsymbol{A}^{-1})^\star \boldsymbol{p}}{1 - (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x})}.$$

7. Adjuk meg a $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$ azaz a $\boldsymbol{p} : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés transzponáltját a $\mathbb{K}^\star \equiv \mathbb{K}$, $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}, \mathbf{V}^\star) \equiv \mathbf{V}^\star$ azonosítások alapján!

15. Oszlop- és sorvektorok

15.1. A 11. fejezetben mondottak szerint $\mathbb{K}^N$ duálisát azonosíthatjuk $\mathbb{K}^N$-nel:

$$(\mathbb{K}^N)^\star = \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}^{1 \times N} = \mathbb{K}^N.$$

Ez egyrészt igen jó, mert könnyen számolhatunk ilyen lineáris funkcionálokkal, másrészt egy kicsit kellemetlen, mert összetéveszthetjük a vektorokat és kovektorokat (lineáris funckionálokat). Ha már elég gyakorlatunk van, az összetévesztés veszélye kicsiny, és matematikai szempontból nem is lényeges. Fizikai tartalmukat tekintve azonban a vektorok és kovektorok különbözők, és nem célszerű elmosni köztük a különbséget (lásd később a koordinátázás című fejezetet). Ezért sokszor megkülönböztető jelölést alkalmaznak $\mathbb{K}^N$ és $(\mathbb{K}^N)^\star$ elemeire. Ezt tekintjük most át.

Amikor a $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$ lineáris leképezéseket mátrixokkal azonosítottuk, a vektorokat oszlopba írtuk. A $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés az ottani megállapodás szerint viszont egy sor. Ezért a vektorokat **oszlopvektoroknak**, a kovektorokat **sorvektoroknak** is szokták mondani. Jelölésben úgy különböztetik meg őket, hogy az oszlopvektorok tagjainak indexét fölülre, a sorvektorokét alulra írják:

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi^k \mid k = 1, \dots, N) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^N \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^N,$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_k \mid k = 1, \dots, N) = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_N \end{pmatrix} \in (\mathbb{K}^N)^\star,$$

és a márt megismert „sor-oszlop" szorzással

$$(\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^N \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \pi_k \xi^k.$$

Ebben és az utána levő fejezetben következetesen alkalmazzuk ezt az alsó-fölső indexelést, a könyvünk más részében azonban nem.

15.2. A kanonikus projekciók

$$\mathrm{pr}^i : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}, \quad \boldsymbol{\xi} \mapsto \xi^i \qquad (i = 1, \dots, N)$$

lineáris funkcionálok, azaz $(\mathbb{K}^N)^\star$ elemei. Azért írtunk most a projekciókhoz fölső indexet, mert a $\mathrm{pr}^i(\boldsymbol{\xi}) = \xi^i$ egyenlőségben így áll az i „szabad index" (amire nem összegzünk) mind a két oldalon azonos helyzetben. Ezt a szabályt is jegyezzük meg.

Ha mint szokásosan $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N$ jelöli a $\mathbb{K}^N$ standard bázisát, akkor

$$(\mathrm{pr}^i|\boldsymbol{e}_k) = \delta^i{}_k,$$

vagyis $\mathrm{pr}^1, \dots, \mathrm{pr}^N$ épp a standard bázis duálisa. Nem nehéz belátni, hogy pr^i mint sorvektor az a szám N-es, amelynek az i-edik tagja 1, a többi nulla:

$$\mathrm{pr}^i = (0, \dots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \dots, 0),$$

azaz a standard bázis duálisa a $(\mathbb{K}^N)^\star \equiv \mathbb{K}^N$ azonosításban önmaga. Ezért célszerűen azt írjuk, hogy

$$\boldsymbol{e}^i := \mathrm{pr}^i.$$

15.3. Az eddigieknek megfelelően a mátrixokat is alsó-fölső indexekkel jelöljük, aszerint, honnan hová leképezéseknek tekintjük őket. Közelebbről, ha az áttekinthetőség kedvéért ugyanolyan szimbólummal jelöljük a standard bázisvektorokat $\mathbb{K}^N$-ben és $\mathbb{K}^M$-ben,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &: \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M \equiv \big(\alpha^i{}_k := (\boldsymbol{e}^i | \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k) \mid i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, N\big),\\
\boldsymbol{R} &: \mathbb{K}^N \to (\mathbb{K}^M)^\star \equiv \big(\rho_{ik} := (\boldsymbol{e}_i | \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_k) \mid i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, N\big)\\
\boldsymbol{B} &: (\mathbb{K}^N)^\star \to (\mathbb{K}^M)^\star \equiv \big(\beta_i{}^k := (\boldsymbol{e}_i | \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}^k) \mid i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, N\big)\\
\boldsymbol{S} &: (\mathbb{K}^N)^\star \to \mathbb{K}^M \equiv \big(\sigma^{ik} := (\boldsymbol{e}^i | \boldsymbol{S}\boldsymbol{e}^k) \mid i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, N\big).
\end{aligned}$$

Tehát ha $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{K}^N$ és $\boldsymbol{\pi} \in (\mathbb{K}^N)^\star$, akkor

$$(\boldsymbol{A\xi})^i = \sum_{k=1}^N \alpha^i{}_k \xi^k, \qquad (\boldsymbol{R\xi})_i = \sum_{k=1}^N \rho_{ik} \xi^k,$$

$$(\boldsymbol{B\pi})_i = \sum_{k=1}^N \beta_i{}^k \pi_k, \qquad (\boldsymbol{S\pi})^i = \sum_{k=1}^N \sigma^{ik} \pi_k.$$

Figyeljük meg a szabályt: mindig ellentétes helyzetben levő indexekre összegzünk.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy bár ez az ,,alsó-fölső" indexezés hasznos, jól is kezelhető, a mátrixok konkrét alakjában ezt nem tudjuk visszatükrözni: vektort ugyanis lehet sorba vagy oszlopba írni, de mátrixnál az ilyen megkülönböztetés lehetetlen. Honnan tudjuk például, hogy $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ melyik típusú a fentiek közül? Másrészt a sor-oszlop szorzás általános szabálya is elvész, hiszen ha sorvektorra hat a mátrix, akkor sor-sor szorzást kell alkalmazni, és az eredmény lehet sorvektor is, oszlopvektor is.

Itt ragadjuk meg az alkalmat, hogy hangsúlyozzuk, a ,,sor" és ,,oszlop" nem matematikai fogalmak; ne higgyük, hogy vektor és oszlop, kovektor és sor szükségszerűen összetartozó dolgok. Fordítva is megállapodhattunk volna.

15.4. Az $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^M)$ transzponáltja $\boldsymbol{A}^\star \in \mathrm{Lin}((\mathbb{K}^M)^\star, (\mathbb{K}^N)^\star)$. Mátrixának ik-adik tagja

$$(\alpha^\star)_i{}^k := (\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{e}^k)_{(\mathbb{K}^N)^\star} = (\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{e}^k|\boldsymbol{e}_i)_{\mathbb{K}^N} = (\boldsymbol{e}^k|\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i)_{\mathbb{K}^M} = \alpha^k{}_i.$$

Szemléletesen: $\boldsymbol{A}^\star$ mátrixa az $\boldsymbol{A}$ mátrixának a főátlóra való tükrözöttje:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha^1{}_1 & \alpha^1{}_2 & \cdots & \alpha^1{}_N \\ \alpha^2{}_1 & \alpha^2{}_2 & \cdots & \alpha^2{}_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha^M{}_1 & \alpha^M{}_2 & \cdots & \alpha^M{}_N \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^\star = \begin{pmatrix} (\alpha^\star)_1{}^1 & (\alpha^\star)_1{}^2 & \cdots & (\alpha^\star)_1{}^M \\ (\alpha^\star)_2{}^1 & (\alpha^\star)_2{}^2 & \cdots & (\alpha^\star)_2{}^M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha^\star)_N{}^1 & (\alpha^\star)_N{}^2 & \cdots & (\alpha^\star)_N{}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1{}_1 & \alpha^2{}_1 & \cdots & \alpha^M{}_1 \\ \alpha^1{}_2 & \alpha^2{}_2 & \cdots & \alpha^M{}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha^1{}_N & \alpha^2{}_N & \cdots & \alpha^M{}_N \end{pmatrix}$$

Tersmészetesen hasonló formulák érvényesek $\mathbb{K}^N \to (\mathbb{K}^M)^\star$ stb. lineáris leképezések transzponáltjára. Ezért értelmezzük úgy egy $M \times N$-es mátrix **transzponáltját**, mint azt az $N \times M$-es mátrixot, amelyet a főátlóra való tükrözéssel nyerünk.

Az indexek alsó-fölső elhelyezése jól tükrözi azt a tényt, hogy a szimmetrikusság csak $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ illetve $\mathbf{V}^\star \to \mathbf{V}$ lineáris leképezésekre értelmes. A fenti jelöléseknek megfelelően $\boldsymbol{B} : \mathbb{K}^N \to (\mathbb{K}^N)^\star$ illetve $\boldsymbol{R} : (\mathbb{K}^N)^\star \to \mathbb{K}^N$ pontosan akkor szimmetrikus, ha $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ illetve $\rho^{ik} = \rho^{ki}$ minden i, k esetén. Azt, hogy $\boldsymbol{A} : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ szimmetrikusságának nincs értelme, abból látjuk, hogy $\alpha^i{}_k$ nem lehet egyenlő sem $\alpha^k{}_i$-vel sem $\alpha_k{}^i$-vel az azonos jelű indexek különböző helyzete miatt.

Mindez persze csak az absztrakt formulákban jelentkezik. Egy akármilyen konkrét mátrix lehet szimmetrikus: például $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ha ez egy $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ leképezés mátrixa, akkor a szimmetrikussága a ,,véletelen'' műve, ,,nem jelent semmit''; ha viszont $\mathbb{K}^2 \to (\mathbb{K}^2)^\star$ leképezés mátrixa, akkor szimmetrikussága ,,szükségszerű'', és jól meghatározott ,,jelentése van''. A következő fejezetben pontosan látjuk, mi a tartalma ezeknek a kijelentéseknek.

15.5. Vizsgáljuk meg a $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$ egy rangú lineáris leképezéseket. Legyen $\boldsymbol{\eta} := (\eta^i \mid i = 1, \ldots, M) \in \mathbb{K}^M$ és $\boldsymbol{\pi} := (\pi_k \mid k = 1, \ldots, N) \in (\mathbb{K}^N)^\star$. Az $\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\pi} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^M)$ mátrixot az határozza meg, hogy minden $\boldsymbol{\xi} = (\xi^k \mid k = 1, \ldots, N) \in \mathbb{K}^N$ esetén $(\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\pi})\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta}$, azaz

$$\sum_{k=1}^N (\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\pi})^i{}_k \xi^k = \left(\sum_{k=1}^N \pi_k \xi^k\right) \eta_i \qquad (i = 1, \ldots, M).$$

Ebből jól látszik, hogy

$$(\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\pi})^i{}_k = \eta^i \pi_k \qquad (i = 1, \ldots, M; k = 1, \ldots, N).$$

Ennek megfelelően, ha $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{e}^k$, akkor olyan mátrixot kapunk, amelynek az ik-adik tagja 1, a többi nulla.

15.6. Feladatok

1. Adjunk meg egy olyan nem nulla lineáris funkcionált $\mathbb{C}^3$-on, amely nulla értéket vesz fel az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

vektorokon.

2. Adjuk meg a $\mathbb{C}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisának a duálisát!

3. Számítsuk ki az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i) \end{pmatrix} \otimes (1, 2)$$

mátrix tagjait!

16. Koordinátázás

16.1. Azzal kell kezdenünk, hogy egy kicsit pontosítjuk a $\mathbb{K}^N$-re mondottakat. Nevezetesen, amikor az $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N$ standard bázisról beszéltünk, a 3. fejezet értelmében az $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N\}$ halmazra kellett volna utalnunk. Ha azonban ezt tesszük, akkor értelmét veszti például az, hogy egy lineáris leképezést adott módon mátrixszal azonosítunk, hiszen a mátrix tagjainak a sorrendje igen fontos (ha két tagot felcserélünk, általában az eredetitől különböző márixot kapunk), a fenti halmazban viszont értelmetlen a sorrend. Amikor tehát az $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N$ standard bázisról beszéltünk tulajdonképpen az $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ indexezett N-esre kellett gondolnunk. Most pontossá tesszük ezt.

Definíció *Legyen* $\mathbf{V}$ *vektortér,* I *indexhalmaz. A* $\mathbf{V}^I$*-nek a* $(\boldsymbol{v}_i \mid i \in I)$ *elemét a* $\mathbf{V}$ ***indexezett bázisának*** *nevezzük, ha* $\{\boldsymbol{v}_i \mid i \in I\}$ *(amely a* $\mathbf{V}$ *részhalmaza) bázis* $\mathbf{V}$*-ben.*

16.2. Legyen $\mathbf{V}$ a $\mathbb{K}$ fölötti $N < \infty$ dimenziós vektortér. Mint tudjuk, $\mathbf{V}$ izomorf $\mathbb{K}^N$-nel. Egy $\boldsymbol{K} : \mathbf{V} \to \mathbb{K}^N$ izomorfizmust a $\mathbf{V}$ **koordinátázásának** hívunk.

A $\boldsymbol{K}$ koordinátázás meghatározza $\mathbf{V}$-nek egy indexezett bázisát a $\boldsymbol{v}_i := \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ formulával. Fordítva, a $\mathbf{V}$-nek egy $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázisa meghatározza a $\mathbf{V}$ egy koordinátázását a $\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i := \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ formulával. Tehát koordinátázások és indexezett bázisok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak.

A $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázis meghatározta koordinátázást igen jól használható alakban tudjuk megadni a 12.4. $(**)$ képlet alapján. Ha $(\boldsymbol{p}^1, \ldots, \boldsymbol{p}^N)$ az adott bázis duálisa (most használjuk az alsó-felső index formalizmusát), akkor

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \big((\boldsymbol{p}^i|\boldsymbol{x}) \mid i = 1, \ldots, N\big) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}),$$

azaz $\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ éppen az $\boldsymbol{x}$ vektornak az adott bázisra vonatkozó koordinátáiból álló indexezett N-es.

A koordinátázás inverzét, a $\mathbf{V}$ **paraméterezésének** hívjuk:

$$\boldsymbol{P} := \boldsymbol{K}^{-1} : \mathbb{K}^N \to \mathbf{V}, \quad (\xi^i \mid i = 1, \ldots, N) \mapsto \sum_{i=1}^{N} \xi^i \boldsymbol{v}_i.$$

16.3. Érdekes és fontos kérdés, mi a kapcsolat egy vektornak két különböző koordinátázás szerinti koordinátái között.

Legyen az előzőekben adott indexezett bázis mellett egy másik $(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_N)$ indexezett bázis is, amelynek a duálisa $(\boldsymbol{p}'^1, \ldots, \boldsymbol{p}'^N)$. Ekkor a 12.4. $(**)$ szerint

$$\boldsymbol{v}'_i = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{p}^k|\boldsymbol{v}'_i)\boldsymbol{v}_k \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{p}'^j|\boldsymbol{v}_k)\boldsymbol{v}'_j \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

Következésképpen minden i-re

$$\boldsymbol{v}'_i = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{p}^k|\boldsymbol{v}'_i) \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{p}'^j|\boldsymbol{v}_k)\boldsymbol{v}'_j = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{p}^k|\boldsymbol{v}'_i)(\boldsymbol{p}'^j|\boldsymbol{v}_k) \right) \boldsymbol{v}'_j,$$

amiből

$$\sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{p}'^j|\boldsymbol{v}_k)(\boldsymbol{p}^k|\boldsymbol{v}'_i) = \delta^j{}_i. \tag{$*$}$$

Szokás a

$$\boldsymbol{T}' := \big((\boldsymbol{p}^k|\boldsymbol{v}'_i) \mid k, i = 1, \ldots, \mathrm{N}\big)$$

mátrixot a ,,vesszőtlen" bázisról a ,,vesszős" bázisra való **áttérés** mátrixának nevezni. Hasonlóan,

$$\boldsymbol{T} := \big((\boldsymbol{p}'^j|\boldsymbol{v}_k) \mid j,k = 1,\dots,\mathbf{N}\big)$$

a ,,vesszőtlen" bázisról a ,,vesszősre" való áttérés mátrixa. A fenti összefüggés azt mondja, hogy az egyik mátrix a másiknak az inverze:

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^N}, \quad \text{azaz} \quad \boldsymbol{T}' = \boldsymbol{T}^{-1}.$$

Ha $\boldsymbol{\xi} = (\xi^i \mid i = 1,\dots,N)$ és $\boldsymbol{\xi}' = (\xi'^i \mid i = 1,\dots,N)$ az $\boldsymbol{x}$ vektor koordinátái a ,,vesszőtlen" illetve ,,vesszős" bázisban, akkor $\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{K}'\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\xi}$, és

$$\xi'^i = \left(\boldsymbol{p}'^i \mid \sum_{k=1}^{N} \xi^k \boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \xi^k(\boldsymbol{p}'^i|\boldsymbol{v}_k) \qquad (k = 1,\dots,N),$$

azaz

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{K}^{-1} = \boldsymbol{T}.$$

Látjuk, hogy az áttérés mátrix adja meg az úgynevezett **vektori transzformációs szabályt**, amely megmondja, hogyan változnak meg a vektorok koordinátái, ha egy bázisról áttérünk egy másikra.

16.4. Érdekes közelebbről szemügyre venni a $\mathbf{V} = \mathbb{K}^N$ esetét. Legyen a ,,vesszőtlen" bázis a standard bázis, és hívjuk a vesszős bázist ,,újnak". Ekkor a $\boldsymbol{K} : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ koordinátázás az egységmátrix ($\mathbb{K}^N$ identitása). Az ,,új" bázis szerinti $\boldsymbol{K}'$ koordinátázás tehát egyenlő az ,,új" bázisról a standard bázisra való áttérés mátrixával.

16.5. A $\mathbf{V}$ vektortér $(\boldsymbol{v}_i \mid i = 1,\dots,N)$ indexezett bázisának megfelelő $\boldsymbol{K}$ kordinátázás meghatározza a $\mathbf{V}^\star$ egy koordinátázását: azt, amelyik a $(\boldsymbol{p}^i \mid i = 1,\dots,N)$ duális bázis elemeihez rendeli a $(\mathbb{K}^N)^\star$ $(\boldsymbol{e}^1,\dots,\boldsymbol{e}^N)$ standard bázisának az elemeit. Azt állítjuk, hogy ez a koordinátázás $(\boldsymbol{K}^{-1})^\star = \boldsymbol{P}^\star$. Valóban, minden $k = 1,\dots,N$ és $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i \mid i = 1,\dots,N) \in \mathbb{K}^N$ esetén

$$\big((\boldsymbol{K}^{-1})^\star\boldsymbol{p}^i \mid \boldsymbol{\xi}\big)_{\mathbb{K}^N} = \big(\boldsymbol{p}^i \mid \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\xi}\big)_{\mathbf{V}} = \left(\boldsymbol{p}^i \,\middle|\, \sum_{k=1}^{N} \xi^k \boldsymbol{v}_k\right)_{\mathbf{V}} = \sum_{k=1}^{N} \xi^k (\boldsymbol{p}^i|\boldsymbol{v}_k)_{\mathbf{V}} = \xi^i =$$
$$= (\boldsymbol{e}^i|\boldsymbol{\xi})_{\mathbb{K}^N},$$

tehát $(\boldsymbol{K}^{-1})^\star\boldsymbol{p}^i = \boldsymbol{e}^i$, amit az inverz-képzés és transzponálás felcserélhetősége folytán úgy is írhatunk, hogy $\boldsymbol{p}^i = \boldsymbol{K}^\star\boldsymbol{e}^i$.

A 16.3. végén levő képletből adódik, hogy egy másik, ,,vesszős" koordinátázásra való áttérésnél a **kovektori transzformációs szabály**

$$(\boldsymbol{P}')^\star(\boldsymbol{P}^\star)^{-1} = (\boldsymbol{T}^{-1})^\star.$$

A kovektorok koordinátái másképp változnak egy másik bázisra való áttérésnél, mint a vektorok koordinátái. Előfordulhat például, hogy egy vektornak és egy kovektornak a koordinátái egy bázisban ugyanazok, mondjuk $(1,2,1)$. Egy másik bázisban azonban már különbözők a koordinátáik.

16.6. A koordinátázással a lineáris leképezéseket átvisszük mátrixokba.

Az $\boldsymbol{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ lineáris leképezés mátrixa a $\boldsymbol{K}:\mathbf{V}\to\mathbb{K}^N$ illetve az $\boldsymbol{L}:\mathbf{W}\to\mathbb{K}^M$ koordinátázásban az $\boldsymbol{LAK}^{-1}:\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}^M$ lineáris leképezés.

Ha $(\boldsymbol{v}_k \mid k=1,\dots,N)$ és $(\boldsymbol{w}_i \mid i=1,\dots,M)$ a $\boldsymbol{K}$ illetve az $\boldsymbol{L}$ koordinátázásnak megfelelő indexezett bázis $\mathbf{V}$-ben illetve $\mathbf{W}$-ban, és $(\boldsymbol{p}^k \mid k=1,\dots,N)$ illetve $(\boldsymbol{f}^i \mid i=1,\dots,M)$ a hozzájuk tartozó duális bázis, akkor a 15.3. szerint az $\boldsymbol{A}$ mátrixának ik-adik tagja

$$(\boldsymbol{e}^i|\boldsymbol{LAK}^{-1}\boldsymbol{e}_k)_{\mathbb{K}^M}=(\boldsymbol{e}^i|\boldsymbol{LAv}_k)_{\mathbb{K}^M}=(\boldsymbol{L}^\star\boldsymbol{e}^i|\boldsymbol{Av}_k)=(\boldsymbol{f}^i|\boldsymbol{Av}_k),$$

tehát $\boldsymbol{A}$ mátrixa a szóban forgó bázisokban

$$\big((\boldsymbol{f}^i|\boldsymbol{Av}_k)\mid i=1,\dots,M;k=1,\dots,N\big).$$

Vegyük észre, hogy a 13.3. állítás szerint a lineáris leképezés mátrixának tagjai épp a lineáris leképezés koordinátái a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ megfelelő indexezett bázisára vonatkozóan.

Az $\boldsymbol{Ax}\in\mathbf{W}$ koordinátái az adott bázisban $\boldsymbol{LAx}=(\boldsymbol{LAK}^{-1})(\boldsymbol{Kx})$, tehát úgy számíthatjuk ki ezeket a koordinátákat, hogy alkalmazzuk $\boldsymbol{A}$ mátrixát az $\boldsymbol{x}$ koordinátáiból álló oszlopvektorra.

16.7. Különönes érdekes azoknak a lineáris leképezéseknek a mátrixa, amelyek $\mathbf{V}$ és/vagy $\mathbf{V}^\star$ között hatnak.

$$\boldsymbol{A}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{V})\quad\text{mátrixa}\quad\boldsymbol{KAK}^{-1}=\big((\boldsymbol{p}^i|\boldsymbol{Av}_k)\mid i,k=1,\dots,N\big),$$

$$\boldsymbol{R}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{V}^\star)\quad\text{mátrixa}\quad\boldsymbol{P}^\star\boldsymbol{RP}=\big((\boldsymbol{v}_i|\boldsymbol{Rv}_k)\mid i,k=1,\dots,N\big),$$

$$\boldsymbol{B}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star,\mathbf{V}^\star)\quad\text{mátrixa}\quad\boldsymbol{P}^\star\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^\star)^{-1}=\big((\boldsymbol{v}_i|\boldsymbol{Bp}^k)\mid i,k=1,\dots,N\big),$$

$$\boldsymbol{S}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star,\mathbf{V})\quad\text{mátrixa}\quad\boldsymbol{KSK}^\star=\big(\boldsymbol{p}^i|\boldsymbol{Sp}^k\mid i,k=1,\dots,N\big);$$

itt mindig úgy használtuk $\boldsymbol{K}$-t illetve az inverzét $\boldsymbol{P}$-t hogy a formulák ,,szépek'' legyenek: egyszerűek, és vagy csak $\boldsymbol{K}$ vagy csak $\boldsymbol{P}$ szerepeljen bennük.

Ha veszünk egy másik, ,,vesszős'' koordinátázást, akkor

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}')^{-1} = \boldsymbol{K}'\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{K}')^{-1} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}^{-1})\boldsymbol{T}^{-1},$$

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}')^\star = \boldsymbol{K}'\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}\boldsymbol{K}^\star(\boldsymbol{K}^\star)^{-1}(\boldsymbol{K}')^\star = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}\boldsymbol{K}^\star)\boldsymbol{T}^\star,$$

és hasonló formulákat írhatunk a többi esetre is; láthatjuk, hogy az egyik bázisról a másikra való áttérésnél a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezések mátrixainak változása, a **transzformációs szabály** más, mint a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ stb. lineáris leképezések mátrixaié.

16.8. Jól látszik az előző pont formuláiból, hogy egy $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ illetve $\mathbf{V}^\star \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés pontosan akkor szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus, ha bármely bázisra vonatkozó mátrixa szimmetrikus illetve antiszimmetrikus.

Előfordulhat, persze, hogy egy $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés mátrixa valamely bázisban szimmetrikusnak adódik, de ez csak a ,,véletlen" műve: más bázisban a mátrixa már nem lesz szimmetrikus, amint arról a transzformációs szabály alapján könnyen megyőződzdhetünk..

16.9. Feladatok

1. Vegyük a $\mathbf{V}$ két indexezett bázisát, a ,,vesszőtlent" és a ,,vesszőset" az előzőek szerint. Definiáljuk az $\boldsymbol{Z} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezést az $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{v}_i := \boldsymbol{v}_i'$ $(i = 1, \ldots, N)$ formulával. Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{Z}$ mátrixa mindkét bázisra vonatkozóan ugyanaz, és egyenlő a ,,vesszőtlen" bázisról a ,,vesszősre" való áttérés mátrixával, azaz $\boldsymbol{K}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{K}^{-1} = \boldsymbol{K}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{K}')^{-1} = \boldsymbol{T}$.

Mi a $\boldsymbol{Z}$ mátrixa, ha értelmezési tartományában ($\mathbf{V}$-ben) a $\boldsymbol{K}$ koordinátázást, értékkészletében (ez is $\mathbf{V}$!) a $\boldsymbol{K}'$ koordinátázást vesszük?

2. Bizonyítsuk be a 16.3. $(*)$ összefüggést a 13.5.4. feladat alapján.

3. Legyen $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$. Adjuk meg $\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p}$ mátrixát a $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ egy-egy indexezett bázisára vonatkozóan.

4. Mutassuk meg, hogy ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ mátrixa ugyanaz minden koordinátázásban, akkor van olyan α szám, hogy $\boldsymbol{A} = \alpha\mathrm{id}_{\mathbf{V}}$.

5. Mi a $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázisról az $(\alpha_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, \alpha_N\boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázisra való áttérés mátrixa, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ adott nem nulla számok?

6. Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ mátrixa ugyanaz az előbbi feladat mindkét bázisára vonatkozóan.

7. Tekintsük a legfeljebb $(N-1)$-ed fokú polinomok vektorterét. Mi a

(i) differenciálás,

(ii) a $p \mapsto (t \mapsto p(t+1))$ lineáris leképezés

mátrixa az $(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}^k \mid k = 0, 1, \ldots, N-1)$ indexezett bázisban?

8. Határozzuk meg a legfeljebb $(N-1)$-ed fokú polinomok vektorterén a

(i) $\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}}$

(ii) $\boldsymbol{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}}^2\boldsymbol{D}^2$

(lásd 8.2. (vii)) mátrixát az $(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}^k \mid k = 0, 1, \ldots, N-1)$ indexezett bázisban.

9. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$-ban a standard bázisról az

$$(1 \quad i \quad 0), \quad (0 \quad 1 \quad i), \quad (i \quad 0 \quad 1)$$

indexezett bázisra való áttérés mátrixát!

10. Legyen az $\boldsymbol{A} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ lineáris leképezés mátrixa (a standard bázisban)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mi az $\boldsymbol{A}$ mátrixa az előző feladatban szereplő bázisban?

11. Legyen az $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^2)$ mátrixa (a standard bázisban)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mi az $\boldsymbol{A}$ mátrixa az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$$

indexezett bázisban?

12. Feleljünk az előző két feladat kérdéseire, ha az adott mátrixokat $\mathbb{C}^3 \to (\mathbb{C}^3)^\star$ illetve $\mathbb{C}^2 \to (\mathbb{C}^2)^\star$ lineáris leképezéseknek tekintjük.

13. Legyen I indexhalmaz, és jelölje $\mathbb{K}^{(I)}$ azokat az $I \to \mathbb{K}$ leképezéseket, amelyek legfeljebb véges sok helyen nem nullák. A pontonkénti műveletekkel $\mathbb{K}^{(I)}$ vektortér. Legyen $\boldsymbol{e}_i$ az az eleme ennek a vektortérnek, amely az i helyen 1 értéket vesz fel, máshol nullát. Ekkor $(\boldsymbol{e}_i \mid i \in I)$ a $\mathbb{K}^{(I)}$ indexezett bázisa.

Ha $(\boldsymbol{v}_i \mid i \in I)$ a $\mathbf{V}$ vektortér indexezett bázisa, akkor $\mathbf{V} \to \mathbb{K}^{(I)}$, $\boldsymbol{v}_i \mapsto \boldsymbol{e}_i$ izomorfizmust határoz meg, amelyet a $\mathbf{V}$ koordinátázásának hívunk. Mi marad érvényben a fejezetben mondottak közül az ilyen esetre (amikor tehát az indexhalmaz nem feltétlenül véges)?

IV. MULTILINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

17. Bilineáris leképezések

17.1. Definíció *Legyen* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{W}$ *vektortér (azonos* $\mathbb{K}$ *test fölött). Az* $\boldsymbol{R} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *leképezést* ***bilineárisnak*** *nevezzük, ha*

(i) minden $\boldsymbol{u} \in \mathbf{U}$ *esetén* $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *lineáris,*
(ii) minden $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ *esetén* $\mathbf{U} \to \mathbf{W}$, $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *lineáris.*

Egyszerű tény, hogy $\boldsymbol{R}(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ minden $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ és $\boldsymbol{u} \in \mathbf{U}$ esetén.
A fenti meghatározó tulajdonságok egyenértékűek azzal, hogy

$$\boldsymbol{R}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{u}_i, \sum_{j=1}^{s} \beta_j \boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j),$$

ahol a szokásos jeleket használtuk lineáris kombinációkra.

Igen könnyű belátni – az olvasóra bízzuk, tegye meg a 8.3-beli bizonyítás mintájára –, hogy az $\mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ bilineáris leképezések a pontonkénti művelettel ellátva vektorteret alkotnak (a $\mathbf{W}^{\mathbf{U}\times\mathbf{V}}$ alterét). Jelölje

$$\mathrm{Lin}^2(\mathbf{U} \times \mathbf{V}, \mathbf{W})$$

ezt a vektorteret.

Az is egyszerű tény, hogy ha $\boldsymbol{R} \in \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U} \times \mathbf{V}, \mathbf{W})$ és
– $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{U}', \mathbf{U})$, $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}', \mathbf{V})$, akkor $\boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \in \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}' \times \mathbf{V}', \mathbf{W})$,
– $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{W}, \mathbf{W}')$, akkor $\boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{R} \in \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U} \times \mathbf{V}, \mathbf{W}')$.

17.2. A következő példákban felsorolt leképezések bilineárisak.

(i) $\mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$, $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto \sum_{i=1}^{N} \xi_i \eta_i$. Vegyük észre, hogy $N = 1$ esetén ez épp a szorzás.

(ii) $\mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbf{P}$, $(p, q) \mapsto pq$, ahol $\mathbf{P}$ a polinomok vektorterét jelöli.

(iii) $\mathbb{K} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $(\alpha, \boldsymbol{x}) \mapsto \alpha\boldsymbol{x}$.

(iv) $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$; speciálisan (a $\mathbf{W} = \mathbb{K}$ esete) $\mathbf{V}^\star \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) \mapsto (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})$.

(v) $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \times \mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

(vi) $\mathbf{W} \times \mathbf{V}^\star \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}) \mapsto \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p}$.

17.3. Alapvető jelentőségű az a tény, hogy egy bilineáris leképezést egyérelműen meghatároznak bármely bázisok Descartes-szorzatán felvett értékei. Sőt ennél egy kicsit több is mondható.

Állítás *Ha $\mathbf{W}$ vektortér, A az $\mathbf{U}$ vektortér bázisa, B a $\mathbf{V}$ vektortér bázisa, akkor tetszőleges $\boldsymbol{R} : A \times B \to \mathbf{W}$ leképezés egyértelműen kiterjesztető $\mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ bilineáris leképezéssé.*

Bizonyítás Legyen $A = \{\boldsymbol{u}_i \mid i \in I\}$ és $B = \{\boldsymbol{v}_j \mid j \in J\}$. A kiterjesztést – amelyet szintén $\boldsymbol{R}$-rel jelölünk – a következőképp definiáljuk:

$$\boldsymbol{R}\left(\sum_{i\in F} \alpha_i \boldsymbol{u}_i, \sum_{j\in G} \beta_j \boldsymbol{v}_j\right) := \sum_{i\in F}\sum_{j\in G} \alpha_i\beta_j \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j)$$

$$\big(F \subset I \text{ véges},\ G \subset J \text{ véges},\ \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}, i \in F, j \in G\big).$$

Ezután a bizonyítás menete lényegében ugyanaz, mint a 8.4. bizonyításáé.

17.4. Egy bilineáris leképezés értékkészlete általában nem lineáris altér. Most az értékkészlet kifeszítette alteret jellemezzük.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{R} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ bilineáris leképezés. Ekkor* $\mathrm{Span}(\mathrm{Ran}\boldsymbol{R})$ *minden eleme $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)$ alakú, ahol $n \in \mathbb{N}$, és $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ az $\mathbf{U}$-nak, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ a $\mathbf{V}$-nek elemei, amelyek vehetők lineárisan függetlennek, ha az összeg nem nulla.*

Bizonyítás A szóban forgó altér elemei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}(\alpha_i\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)$ alakúak; az $\boldsymbol{u}_i' := \alpha_i\boldsymbol{u}_i$ jelöléssel és a vessző elhagyásával végül is a $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)$ alakra jutunk.

Legyen m a $\boldsymbol{v}_i$-k közül kiválasztható legtöbb lineárisan független vektor száma; ha $m = 0$, akkor minden $\boldsymbol{v}_i$ nulla, az összeg is nulla. Tegyük fel, hogy $m > 0$; az általánosság megszorítása nélkül vehetjük úgy, hogy éppen $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ lineárisan függetlenek. Ekkor

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki}\boldsymbol{v}_k \qquad (i = m+1, \dots, n),$$

és

$$\sum_{i=i}^{n} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) + \sum_{i=m+1}^{n} \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{u}_i, \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki}\boldsymbol{v}_k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k) + \sum_{i=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{u}_k + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_{ki}\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_k\right).$$

Az $\mathbf{U}$-beli vektorok átnevezésével azt kaptuk, hogy a szóban forgó altér elemei $\sum\limits_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k)$ alakúak, ahol a $\boldsymbol{v}_k$-k lineárisan függetlenek.

Legyen most r az $\boldsymbol{u}_k$-k közül kiválasztható legtöbb lineárisan független vektor száma; ha $r = 0$, akkor minden $\boldsymbol{u}_k$ nulla, az összeg is nulla. Tegyük fel, hogy $r > 0$; az általánosság megszorítása nélkül vehetjük úgy, hogy éppen $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$ lineárisan függetlenek. Ekkor ugyanúgy, mint az előbb, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k) = \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j + \sum_{i=r+1}^{m} \beta_{ji}\boldsymbol{v}_i\right).$$

Befejezésül csak azt kell megmutatnunk, hogy $\left\{\boldsymbol{v}_j + \sum\limits_{i=r+1}^{n} \beta_{ji}\boldsymbol{v}_i \mid j = 1, \dots, \boldsymbol{r}\right\}$ lineárisan függetlenek. Íme: tegyük fel, hogy

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \left(\boldsymbol{v}_j + \sum_{i=r+1}^{m} \beta_{ji}\boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\boldsymbol{v}_k + \sum_{k=r+1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j\beta_{jk}\right)\boldsymbol{v}_k.$$

A $\boldsymbol{v}_k$-k lineáris függetlensége miatt minden együttható, speciálisan $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ nulla.

17.5. Különösen fontos szerepet játszanak azok a bilineáris leképezések, amelyek az alaptestbe képeznek (hasonlóan, mint az alaptestbe képező lineáris leképezések).

Állítás *Legyen* $\mathbf{U}$ *és* $\mathbf{V}$ *vektortér (azonos* $\mathbb{K}$ *test fölött). Ekkor az*

$$i : \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U}^\star) \to \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}\times\mathbf{V}, \mathbb{K}), \qquad \big(i(\boldsymbol{B})\big)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u})_{\mathbf{U}} = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})_{\mathbf{U}^\star},$$

$$(\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U}^\star), \boldsymbol{u} \in \mathbf{U}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V})$$

leképezés lineáris bijekció.

BIZONYÍTÁS Az i leképezés lineáris, mert

$$\begin{aligned}\big(i(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\big)(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= \big((\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\big) = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}) = \\ &= \big(i(\boldsymbol{B})\big)(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \big(i(\boldsymbol{C})\big)(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \\ &= \big(i(\boldsymbol{B}) + i(\boldsymbol{C})\big)(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\end{aligned}$$

és hasonlóan érvelhetünk a számmal szorzást illetően.

Ha $i(\boldsymbol{B}) = \mathbf{0}$, azaz minden $\boldsymbol{u} \in \mathbf{U}$ és $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ esetén $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}) = 0$, akkor $\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ minden $\boldsymbol{v}$-re, tehát $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$, vagyis i injektív.

Legyen most $\boldsymbol{R} \in \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}\times\mathbf{V},\mathbb{K})$. Ekkor minden $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ esetén $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ lineáris funkcionál $\mathbf{U}$-n, azaz $\boldsymbol{R}(\cdot,\boldsymbol{v}) \in \mathbf{U}^\star$. A $j(\boldsymbol{R}) : \mathbf{V} \to \mathbf{U}^\star$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{R}(\cdot,\boldsymbol{v})$ leképezés lineáris, vagyis a $\mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}\times\mathbf{V},\mathbb{K})$ minden $\boldsymbol{R}$ eleméhez egyszerűen hozzárendelhetjük a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{U}^\star)$ egy $j(\boldsymbol{R})$ elemét. Az olvasóra bízzuk, mutassa meg, hogy $i(j(\boldsymbol{R})) = \boldsymbol{R}$, amiből következik, hogy i ráképezés (tehát bijekció, és az inverze j).

17.6. Az imént tárgyalt izomorfizmus annyira természetes, hogy el is hagyjuk a jelölését, vagyis azonosítjuk a szóban forgó lineáris illetve bilineáris léképezéseket, és azt írjuk, hogy

$$\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{U}^\star) \equiv \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}\times\mathbf{V},\mathbb{K}),$$

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}|\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}) := \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \qquad (\boldsymbol{u}\in\mathbf{U}, \boldsymbol{v}\in\mathbf{V}).$$

Az azonosításból az is következik, hogy

$$\dim(\mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}\times\mathbf{V},\mathbb{K})) = (\dim\mathbf{V})(\dim\mathbf{U}),$$

ami különösen akkor érdekes, ha a vektorterek véges dimenziósak.

Egy fontos formulát említünk meg ezzel az azonosítással kapcsolatban. Ha $\boldsymbol{R} \in \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}\times\mathbf{V},\mathbb{K})$, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{U}',\mathbf{U})$, $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}',\mathbf{V})$, akkor

$$\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \equiv \boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}.$$

Valóban, minden $\boldsymbol{u}' \in \mathbf{U}'$, $\boldsymbol{v}' \in \mathbf{V}'$ esetén

$$\big(\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\big)(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}',\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}'|\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{u}'|\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}').$$

17.7. A 17.5. állítás mintájára beláthatjuk, hogy

$$i : \mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{U}) \to \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}^\star\times\mathbf{V},\mathbb{K}), \quad \big(i(\boldsymbol{A})\big)(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{f}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})_{\mathbf{U}},$$

$$(\boldsymbol{A}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{U}), \boldsymbol{f}\in\mathbf{U}^\star, \boldsymbol{v}\in\mathbf{V}),$$

és

$$j : \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}^\star\times\mathbf{V},\mathbb{K}) \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{U}^{**}), \quad j(\boldsymbol{R})\boldsymbol{v} := \boldsymbol{R}(\cdot,\boldsymbol{v})$$

$$(\boldsymbol{R} \in \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}^\star \times \mathbf{V}, \mathbb{K}), \boldsymbol{v} \in \mathbf{V})$$

lineáris injekciók, és $j \circ i : \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U}^{**})$ a természetes beágyazás ($\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U})$ a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U}^{**})$ lineáris altere).

Ezek az injekciók is annyira természetesek, hogy elhagyjuk őket a jelölésből, vagyis azonosítjuk a szóban forgó lineáris illetve bilineáris leképezéseket:

$$\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \Rrightarrow \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}^\star \times \mathbf{V}, \mathbb{K}) \Rrightarrow \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U}^{**}).$$

Ha $\mathbf{U}$ véges dimenziós, akkor $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{**}$, tehát mind i mind j szükségképpen bijekció, és a fenti formulákban $\Rrightarrow$ helyett $\equiv$ áll.

17.8. A mondottak szerint a $(\mathbb{K}^M)^\star \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezések azonosíthatók $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$ lineáris leképezésekkel, azaz $M \times N$-es mátrixokkal.

Az $\boldsymbol{A} = ({\alpha^i}_k \mid i = 1, \ldots, M; k = 1, \ldots, N)$ mátrix a következő bilineáris leképezésnek felel meg:

$$(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \pi_i {\alpha^i}_k \xi^k = (\boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}).$$

Szemléletessé is tehetjük ezt a formulát: a benne szereplő kettős összeget az alábbi elrendezésből sor-oszlop szorzásból kapjuk:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\alpha^1}_1 & {\alpha^1}_2 & \cdots & {\alpha^1}_N \\ {\alpha^2}_1 & {\alpha^2}_2 & \cdots & {\alpha^2}_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\alpha^M}_1 & {\alpha^M}_2 & \cdots & {\alpha^M}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^N \end{pmatrix}.$$

Természetesen az egyéb fönn-lenn indexes mátrixok (lásd a 15. és 16. fejezetet) is megfelelő bilineáris leképezésekkel azonosíthatók; például a két alsó indexes mátrixok, azaz a $\mathbb{K}^N \to (\mathbb{K}^M)^\star$ lineáris leképezések a $\mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezésekkel.

Furcsának tűnhet, hogy az azonosításokban megfordul a sorrend, például a $\mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezéseket $\mathbf{U} \star \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezésekkel azonosítjuk. Ez azért van, hogy $\mathbb{K}^N$ és $\mathbb{K}^M$ esetén a mátrixokra a fenti, jól áttekinthető balróljobbról szorzási sémát alkalmazhassuk.

17.9. Ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor az $\boldsymbol{R} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezést is mátrixszal reprezentálhatjuk a $\boldsymbol{K} : \mathbf{V} \to \mathbb{K}^N$ és $\boldsymbol{L} : \mathbf{U} \to \mathbb{K}^M$ koordinátázásokkal:

$$\boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{L}^{-1} \times \boldsymbol{K}^{-1}) \in \mathrm{Lin}^2(\mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N, \mathbb{K}) \equiv \mathrm{Lin}((\mathbb{K}^N, (\mathbb{K}^M)^*).$$

Ha $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_M)$ és $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ az $\boldsymbol{L}$ illetve a $\boldsymbol{K}$ koordinátázásnak megfelelő indexezett bázis, akkor $\boldsymbol{R}$ mátrixa

$$\big(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_k) \mid i = 1, \ldots, M; k = 1, \ldots, N\big),$$

hiszen a fennálló azonosítás szerint a szóban forgó mátrix ik-adik tagja

$$\big(\boldsymbol{e}_i \;\big|\; \boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{L}^{-1} \times \boldsymbol{K}^{-1})\boldsymbol{e}_k\big) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_k).$$

17.10. Feladatok

1. Bilineárisak-e a
(i) $\mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$, $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto (\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \dots, \xi_N\eta_N)$,
(ii) $\mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$, $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto \xi_N\eta_1$
leképezések?

2. Mutassuk meg (például bázisokat használva), hogy a $0\infty := 0$ megállapodással $\dim(\mathrm{Lin}^2(\mathbf{U} \times \mathbf{V}, \mathbf{W})) = (\dim\mathbf{U})(\dim\mathbf{V})(\dim\mathbf{W})$.

3. Bizonyítsuk be a 17.4. állítás következő általánosítását:

$$i : \mathrm{Lin}\big(\mathbf{V}, \mathrm{Lin}(\mathbf{U}, \mathbf{W})\big) \to \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U} \times \mathbf{V}, \mathbf{W}), \quad \big(i(\boldsymbol{B})\big)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$$

leképezés lineáris bijekció.

4. Értelmezzük az

$$\left(\mathop{\times}_{i=1}^{M} \mathbf{U}_i\right) \times \left(\mathop{\times}_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k\right) \to \mathbb{K}$$

bilineáris leképezés blokk-mátrixát a 17.8. általánosításaként a 11.5. mintájára.

18. Bilineáris formák

18.1. A $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezéseket a $\mathbf{V}$-n adott **bilineáris funcionáloknak** vagy **bilineáris formáknak** szokás hívni.

Definíció *Az $\boldsymbol{R} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris formát **szimmetrikusnak** illetve **antiszimmetrikusnak** mondjuk, ha*

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \quad \textit{illetve} \quad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén.

*A szimmetrikus vagy antiszimmetrikus $\boldsymbol{R}$ bilineáris forma **magja***

$$\mathrm{Ker}\boldsymbol{R} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{V} \mid \boldsymbol{R}(\cdot, \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}.$$

***$\boldsymbol{R}$ nem elfajult (nem degenerált)**, ha a magja nulla.*

Az előző pontban tárgyaltak szerint

$$\mathrm{Lin}^2(\mathbf{V} \times \mathbf{V}) \equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\star), \quad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv (\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})_{\mathbf{V}}.$$

A $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ lineáris leképezésekre már definiáltuk a szimmetrikusság és antiszimmetrikusság fogalmát (lásd 14.5.); az a fenti azonosítás szerint megegyezik az itteni szimmetrikussággal illetve antiszimmetrikussággal. A bilineáris forma magja pedig a megfelelő lineáris leképezés magjával egyenlő. A bilineáris forma pontosan akkor nem elfajuló, ha a megfelelő lineáris leképezés injektív.

Ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós, az $\boldsymbol{R} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezés mátrixa a $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázisban

$$(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k) \mid i, k = 1, \dots, N).$$

Ha $\boldsymbol{R}$ szimmetrikus, akkor minden bázisra vonatkozó mátrixa szimmetrikus; ha $\boldsymbol{R}$ egy bázisra vonatkozó mátrixa szimmertrikus, akkor $\boldsymbol{R}$ szimmetrikus.

18.2. Valós vektorterek esetén igen fontos szerepet játszanak a következő fogalmak.

Definíció *A* $\mathbf{V}$ *valós vektortéren adott* $\boldsymbol{R}$ *szimmetrikus bilineáris forma*

(i) ***pozitív definit****, ha* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ $(\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbf{V})$,

(ii) ***pozitív szemidefinit****, ha* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbf{V})$,

(iii) ***indefinit****, ha van olyan* $\boldsymbol{x}$ *és* $\boldsymbol{y}$ *vektor* $\mathbf{V}$*-ben, hogy* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ *és* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) < 0$.

A ***negatív definit*** *és* ***negatív szemidefinit*** *tulajdonságot az (i) és (ii) mintájára definiáljuk ellenkező előjellel.*

Világos, hogy pozitív (szemi)definit bilineáris forma negatívja negatív (szemi)definit. Egyszerű tény továbbá, hogy pozitív (negatív) definit bilineáris forma magja nulla.

Az előző pontban tárgyalt azonosítás szerint a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ illetve a $\mathbf{V}^\star \to \mathbf{V}$ szimmetrikus lineáris leképezésekre is használjuk a pozitív definit stb. fogalmat. Konkrétan például az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ szimmetrikus lineáris leképezés pozitív definit, ha $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) > 0$ minden $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén.

18.3. Állítás *Mind a szimmetrikus, mind az antiszimmetrikus bilineáris formák alteret alkotnak a bilineáris formák vektorterében; ezek kiegészítő alterek.*

Bizonyítás Egyszerű tény, hogy szimmetrikus bilineáris formák összege is szimmetrikus stb. A két altér közös része a nulla: egy bilineáris forma, amely szimmetrikus is, antiszimmetrikus is, szükségképpen nulla. Ha $\boldsymbol{R} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris, akkor az

$$S\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\big),$$

$$A\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\big)$$

formulával előállított bilineáris formák szimmetrikusak illetve antiszimmetrikusak, és $\boldsymbol{R} = S\boldsymbol{R} + A\boldsymbol{R}$. ■

A bizonyításban szereplő $S\boldsymbol{R}$-t és $A\boldsymbol{R}$-t az $\boldsymbol{R}$ **szimmetrikus részének** illetve **antiszimmetrikus részének** hívjuk.

18.4. Ha $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbf{V}^\star$, akkor 13.1. szerint $\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$, $\boldsymbol{y} \mapsto (\boldsymbol{q}|\boldsymbol{y})\boldsymbol{p}$ lineáris leképezés. 17.5. szerint mint bilineáris forma

$$\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{y}).$$

Bevezetjük a

$$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} := \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{p} \bigtriangledown \boldsymbol{q} := \frac{1}{2} \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q},$$

$$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} := \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{p} \bigtriangleup \boldsymbol{q} := \frac{1}{2} \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$$

jelöléseket. Könnyű látni, hogy $\boldsymbol{p} \bigtriangledown \boldsymbol{q}$ és $\boldsymbol{p} \bigtriangleup \boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q}$ szimmetrikus illetve antiszimmetrikus része.

Matematikakönyvekben kizárólag a $\wedge$ és $\vee$ jel jelenik meg, de hol a mi általunk is így definiált mennyiséget, hol a mi általunk a $\bigtriangleup$ illetve $\bigtriangledown$ jelekkel definiált mennyiséget értik alatta. A kétféle jel bevezetésével erre a kettősségre akartuk felhívni a figyelmet; a továbbiakban azonban csak a $\wedge$ és $\vee$ jelekkel meghatározott mennyiségeket használjuk.

Állítás *Ha* $\dim \mathbf{V} = N < \infty$, *akkor a szimmetrikus bilineáris formák alterének a dimenziója* $\frac{N(N+1)}{2}$, *az antiszimmetrikus bilineáris formák alterének a dimenziója* $\frac{N(N-1)}{2}$. *Közelebbről, ha* $\{\boldsymbol{p}_i \mid i = 1, \dots, N\}$ *a* $\mathbf{V}^\star$ *egy bázisa, akkor*

$$\{\boldsymbol{p}_i \otimes \boldsymbol{p}_k \mid 1 \le i, k \le N\},$$
$$\{\boldsymbol{p}_i \vee \boldsymbol{p}_k \mid 1 \le i \le k \le N\},$$
$$\{\boldsymbol{p}_i \wedge \boldsymbol{p}_k \mid 1 \le i < k \le N\}$$

rendre bázis a bilineáris formák vektorterében, a szimmetrikus bilineáris formák alterében és az antiszimmetrikus bilineáris formák alterében.

Bizonyítás A bilineáris formák vektorterét illetően a $\mathrm{Lin}^2(\mathbf{V} \times \mathbf{V}, \mathbb{K}) \equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\star)$ azonosításra és a 13.3. állításra hivatkozhatunk, de közvetlenül is érvelhetünk az alábbiakhoz hasonlóan.

Mivel a fenti második és harmadik halmaz független alterekben vannak, és az egyik $\frac{N(N+1)}{2}$, a másik $\frac{N(N-1)}{2}$ elemből áll (amint az a kombinatorikából jól ismert), összesen tehát N^2 elemből, amennyi a bilineáris formák vektorének a dimenziója, 2.7. szerint elég belátnunk, hogy külön-külön lineárisan független halmazok.

Tegyük fel, hogy

$$0 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ik} \boldsymbol{p}_i \vee \boldsymbol{p}_k.$$

Ekkor minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén

$$0 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ik} \big(\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}_k(\boldsymbol{p}_i|\boldsymbol{x})\big) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} \beta_{ik}(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}) \right) \boldsymbol{p}_i,$$

ahol

$$\beta_{ik} := \begin{cases} \alpha_{ik} & \text{ha } i < k, \\ 2\alpha_{ik} & \text{ha } i = k, \\ \alpha_{ki} & \text{ha } i > k. \end{cases}$$

A $\boldsymbol{p}_k$-k lineáris függetlensége miatt először azt következtetjük, hogy minden $k = 1, \dots, N$ esetén a nagy zárójelen belüli összeg nulla, amiből, lévén $\boldsymbol{x}$ tetszőleges, $\sum_{i=1}^{N} \beta_{ik} \boldsymbol{p}_i = \mathbf{0}$ adódik, és ismét a $\boldsymbol{p}_i$-k lineáris függetlensége miatt $\beta_{ik} = 0$ minden i, k esetén, amiből viszont $\alpha_{ik} = 0$ minden i, k esetén.

Teljesen hasonlóan érvelhetünk az antiszimmetrikus bázisra vonatkozóan.

18.5. Állítás *A $\mathbf{V}$-n adott $\boldsymbol{R}$ bilineáris forma pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén.*

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{R}$ antiszimmetrikus, akkor teljesül a fenti egyenlőség. Tegyük most fel, hogy ez teljesül; ekkor minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén

$$0 = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$

amiből $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$. ■

Ha tehát $\boldsymbol{R}$ szimmetrikus és $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ minden $\boldsymbol{x}$-re, akkor $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$.

Érdemes viszont megjegyezni, előfordulhat, hogy $\boldsymbol{R} \neq 0$ szimmetrikus, és van olyan $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, amelyre $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$; az ilyen $\boldsymbol{x}$-et az $\boldsymbol{R}$ izotróp vektorának szokás nevezni. Például az

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \big((\xi_0, \xi_1), (\eta_0, \eta_1)\big) \mapsto -\xi_0\eta_0 + \xi_1\eta_1$$

bilineáris formának (α, α) izotróp vektora minden $\alpha \neq 0$ esetén.

18.6. Definíció *Legyen $\boldsymbol{R}$ a véges dimenziós $\mathbf{V}$ vektortéren adott szimmetrikus bilineáris forma. A $\mathbf{V}$ egy $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N\}$ bázisát **$\boldsymbol{R}$-ortogonálisnak** vagy **$\boldsymbol{R}$ szerint ortogonálisnak** mondjuk, ha*

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k) = 0 \qquad (i, k = 1, \dots, N,\ i \neq k).$$

Állítás *Létezik $\boldsymbol{R}$-ortogonális bázis. Ezen túl, ha $\mathbf{V}$ valós vektortér, akkor létezik (az $\boldsymbol{R}$ szimmetrikus bilineáris formához) egyértelműen z, n és p nemnegatív egész szám úgy, hogy ha $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N\}$ $\boldsymbol{R}$-ortogonális bázis, akkor*

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) \begin{cases} = 0 & z \text{ darab } i \text{ index esetén,} \\ < 0 & n \text{ darab } i \text{ index esetén,} \\ > 0 & p \text{ darab } i \text{ index esetén.} \end{cases}$$

Bizonyítás Az $\boldsymbol{R}$-ortogonális bázis létezését a vektortér dimenziójára vonatkozó teljes indukcióval mutatjuk meg.

Nyilvánvaló, hogy egy dimenziós vektortéren minden (szükségképpen egy elemű) bázis bármely szimmetrikus bilineáris formára vonatkozóan ortogonális. Tegyük fel, hogy minden $N-1$ dimenziós vektotéren van bármely szimmetrikus bilineáris forma szerint ortogonális bázis.

Legyen $\boldsymbol{R}$ szimmetrikus bilineáris forma egy N dimenziós vektortéren, és zárjuk ki a triviális $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$ esetet. Ekkor van olyan $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, hogy $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$. Ilyen $\boldsymbol{x}$-et rögzítve, a $\mathbf{V} \to \mathbb{K}$, $\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ lineáris funkcionál nem nulla, így magja $N-1$ dimenziós altér, amelyben $\boldsymbol{x}$ nincs benne. $\boldsymbol{R}$ leszűkítése ennek az altérnek önmagával vett Descartes-szorzatára szintén szimmetrikus bilineáris forma, tehát az indukciós feltevés szerint ebben van $\boldsymbol{R}$-ortogonális bázis. E bázishoz hozzávéve $\boldsymbol{x}$-et az egész $\mathbf{V}$-n $\boldsymbol{R}$-ortogonális bázist kapunk.

Tegyük most fel, hogy $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N\}$ és $\{\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_N\}$ a valós $\mathbf{V}$ vektortér két $\boldsymbol{R}$-ortogonális bázisa, amelyeket a z, n és p illetve a z', n' és p' nemnegatív egész számok jellemeznek.

Könnyen jutunk arra a felismerésre, hogy $z = z' = \dim(\mathrm{Ker}\boldsymbol{R})$. Ugyanis, ha $\boldsymbol{v}_i$ olyan, hogy $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = 0$, akkor az $\boldsymbol{R}$-ortogonalitás miatt $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i) = 0$ minden $k = 1, \dots, N$ esetén, ami maga után vonja, hogy $\boldsymbol{R}(\cdot, \boldsymbol{v}_i) = \mathbf{0}$, azaz $\boldsymbol{v}_i$ benne van $\boldsymbol{R}$ magjában. Ha viszont $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\boldsymbol{R}$, akkor $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}) = 0$ minden $k = 1, \dots, N$ esetén, és a $\sum_{i=1}^{N} \xi_i \boldsymbol{v}_i$ előállításból látjuk, hogy $\xi_i = 0$ minden olyan i esetén, amelyre $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) \neq 0$, azaz $\boldsymbol{x}$ az izotróp bázisvektorok lineáris kombinációja; tehát

$$\mathrm{Ker}\boldsymbol{R} = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_i \mid \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = 0\},$$

és természetesen ugyanez igaz a ,,vesszős" bázisra is.

Vezessük be az

$$\mathbf{M}_- := \operatorname{Span}\{\boldsymbol{v}_i \mid \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) < 0\}, \qquad \mathbf{M}_+ := \operatorname{Span}\{\boldsymbol{v}_i \mid \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) > 0\}$$

jelölést, és hasonlóan $\mathbf{M}'_-$-t, $\mathbf{M}'_+$-t. Vegyük észre, hogy $\mathrm{Ker}\boldsymbol{R}$, $\mathbf{M}_-$, $\mathbf{M}_+$, csakúgy, mint $\mathrm{Ker}\boldsymbol{R}$, $\mathbf{M}'_-$, $\mathbf{M}'_+$ kiegészítő altérrendszer.

Megmutatjuk, hogy

$$(\mathrm{Ker}\boldsymbol{R} + \mathbf{M}_-) \cap \mathbf{M}'_+ = \{\mathbf{0}\}.$$

Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{x}$ a fenti bal oldal eleme,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in F_z \cup F_n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{k \in F'_p} \beta_k \boldsymbol{v}'_k,$$

ahol F_z és F_n azoknak az indexeknek az összessége, amelyekre a ,,vesszőtlen" báziselemek $\mathrm{Ker}\boldsymbol{R}$-ben illetve $\mathbf{M}_-$-ban vannak, és F'_p azoké az indexeké, amelyekre a ,,vesszős" báziselemek $\mathbf{M}'_+$-ban vannak. Ekkor

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -\sum_{i \in F_n} \alpha_i^2 |\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i)| = \sum_{k \in F'_p} \beta_k^2 \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}'_k, \boldsymbol{v}'_k). \tag{$*$}$$

Minthogy α_i-k és β_k-k valósak, ez azt adja, hogy $\alpha_i = 0$ $(i \in F_n)$ és $\beta_k = 0$ $(k \in F'_p)$, azaz $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Ebből azt származtatjuk, hogy $\dim\mathbf{M}'_+ \le \operatorname{codim}(\mathrm{Ker}\boldsymbol{R} + \mathbf{M}_-)$, vagyis $p' \le p$. Felcserélve a vesszősök és vesszőtlenek szerepét fordított egyenlőséget kapunk, tehát $p' = p$, és következésképpen $n' = n$. ■

A bizonyításból látszik az a fontos tény, hogy $\boldsymbol{R}$ pontosan akkor nem elfajuló, ha $\boldsymbol{R}$-ortogonális bázisban nincs izotróp vektor. Továbbá az is nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{R}$ pontosan akkor pozitív (negatív) definit, ha $z = n = 0$ $(z = p = 0)$, pozitív (negatív) szemidefinit, ha $n = 0$ $(p = 0)$, és indefinit, ha $n \ne 0$, $p \ne 0$.

Természetesen mindig rendezhetjük úgy az $\boldsymbol{R}$-ortogonális bázist, hogy az első z elem legyen izotróp, az ezeket követő n elem legyen ,,negatív", a többiek ,,pozitívak". Sőt, az $\boldsymbol{R}$-ortogonális bázist mindig normálhatjuk is: a $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ indexezett $\boldsymbol{R}$ ortogonális bázist **normáltnak** nevezzük, ha

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = \begin{cases} 0 & i = 1, \ldots, z, \\ -1 & i = z+1, \ldots, z+n, \\ 1 & i = z+n+1, \ldots, N. \end{cases}$$

Ilyen bázisban $\boldsymbol{R}$ mátrixa diagonális; a főátló első z tagja nulla, az ezután következő n tag -1, a többi 1.

Felhívjuk a figyelmet arra, igen fontos a most bebizonyított tételnél, hogy valós vektortérről van szó. Komplex vektortér esetén, ha $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \neq 0$, akkor van olyan α szám, hogy $\boldsymbol{R}(\alpha\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{x}) > 0$, tehát mindig vehető olyan $\boldsymbol{R}$-ortogonális bázis, amelynek az $\boldsymbol{R}$ magján kívüli elemei mind „pozitívak".

18.7. Az előbbiekhez hasonló eredményt származtathatunk antiszimmetrikus bilineáris formára is. Itt nem kell kikötnünk, hogy a vektortér valós legyen.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{R}$ antiszimmetrikus bilineáris forma az N dimenziós $\mathbf{V}$ vektortéren. Ekkor létezik olyan r nemnegatív egész szám, $2r \le N$, és olyan $(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázis, hogy*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_{2i-1},\boldsymbol{v}_{2i}) = -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_{2i},\boldsymbol{v}_{2i-1}) = 1 \quad \textit{ha} \quad i = 1,\dots,r,\\ &\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_k) = 0 \quad \textit{minden más } j \textit{ és } k \textit{ esetén.} \end{aligned}$$

Bizonyítás Ismét a teljes indukció módszeréhez folyamodunk. Egy dimenziós vektortérre az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy igaz az állítás $N-1$ dimenziós vektortérre.

Legyen $\boldsymbol{R}$ egy N dimenziós $\mathbf{V}$ vektortéren adott antiszimmetrikus bilineáris forma, és zárjuk ki az $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$ triviális esetet. Legyen $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ olyan vektor, hogy $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = 1$. Nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ nem párhuzamos egymással, tehát két dimenziós alteret feszítenek ki; jelöljük ezt $\mathbf{M}$-mel. Könnyű belátni, hogy

$$\mathbf{K} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{V} \mid \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{x}) = 0\}$$

lineáris altér, és $\mathbf{M} \cap \mathbf{K} = \{\mathbf{0}\}$.

Belátjuk, hogy $\mathbf{K}$ az $\mathbf{M}$ kiegészítője, azaz minden vektor előállítható egy $\mathbf{M}$-beli és egy $\mathbf{K}$-beli vektor összegeként. Más szóval, bármely vektorból egy alkalmas $\mathbf{M}$-beli vektort kivonva $\mathbf{K}$-beli elemet kapunk. Legyen $\boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$, $\alpha_1 := \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{y})$, $\alpha_2 := \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{y})$; ekkor $\boldsymbol{y} - (\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2)$ a $\mathbf{K}$ eleme.

$\boldsymbol{R}$ leszűkítése a $\mathbf{K}\times\mathbf{K}$ altérre szintén antiszimmetrikus bilineáris forma, tehát az indukciós feltevés szerint van olyan $s \in \mathbb{N}_0$, $2s \le N-2$, és a $\mathbf{K}$ egy $(\boldsymbol{v}_3,\dots,\boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázisa úgy, hogy

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_{2i-1},\boldsymbol{v}_{2i}) = -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_{2i},\boldsymbol{v}_{2i-1}) = 1 \quad \text{ha} \quad i = 2,\dots,r := s+1,\\ &\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_k) = 0 \quad \text{minden más } j \text{ és } k \text{ esetén.} \end{aligned}$$

$\mathbf{K}$-nak ezt a bázisát kiegészítve $\boldsymbol{v}_1$-gyel és $\boldsymbol{v}_2$-vel megkapjuk a $\mathbf{V}$ kívánt bázisát. ∎

$\boldsymbol{R}$ mátrixa egy ilyen bázisban: egy $2r\times 2r$-es blokkban a főátló fölött váltakozva r darab 1 és $r-1$ darab 0 áll, alatta ugyancsak váltakozva r darab -1 és $r-1$

darab 0, minden más tag nulla. A bázis alkalmas átrendezésével a gyakorlatban inkább használatos következő blokk-formát kapjuk:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_r \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_r & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{0}$ alkalmas méretű – $(N-2r) \times (N-2r)$-es, $(N-2r) \times r$-es stb. – nulla blokkokat jelöl, $\mathbf{1}_r$ pedig az $r \times r$-es egységmátrixot.

18.8. Komplex vektortéren minden nem nulla bilineáris forma indefinit; ha $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$, akkor van olyan α és β komplex szám, hogy $\boldsymbol{R}(\alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}) > 0$, $\boldsymbol{R}(\beta\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{x}) < 0$. Komplex vektortéren a bilineáris formák mellet nagy szerepet játszanak a következőkben tárgyalt leképezések.

Definíció *Legyen* $\mathbf{V}$ *komplex vektortér. Egy* $\boldsymbol{R} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$ *leképezést* ***szeszkilineárisnak*** *nevezünk, ha*

(i) minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ *esetén* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \cdot)$ *lineáris,*
(ii) minden $\boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ *esetén* $\boldsymbol{R}(\cdot, \boldsymbol{y})$ *konjugált lineáris.*

Az $\boldsymbol{R}$ *szeszkilineáris forma* ***hermitikus*** *illetve* ***antihermitikus****, ha*

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^* \quad \textit{illetve} \quad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$$

minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ *esetén.*

Megjegyezzük, a matematikai irodalomban általában azt követelik meg, hogy $\boldsymbol{R}$ az első változóban legyen lineáris és a második változóban konjugált lineáris; viszont fizikai alkalmazásokban az itteni megállapodást használják.

Ha $B := \{\boldsymbol{v}_i \mid i \in I\}$ a $\mathbf{V}$ bázisa, akkor $\boldsymbol{R} : B \times B \to \mathbb{C}$ leképezés egyértelműen kiterjesztető $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$ szeszkilineáris leképezéssé az

$$\boldsymbol{R}\left(\sum_{i \in F} \alpha_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j \in G} \beta_j \boldsymbol{v}_j\right) := \sum_{i \in F} \sum_{j \in G} \alpha_i^* \beta_j \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j)$$

$$\big(F, G \subset I \text{ végesek, } \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}, i \in F, j \in G\big)$$

formulával.

Nyilvánvaló, hogy ha $\boldsymbol{R}$ antihermitikus, akkor $i\boldsymbol{R}$ hermitikus, tehát elég a hermitikus formákkal foglalkoznunk.

A hermitikus formák **magját** és **nem elfajultságát** ugyanúgy definiáljuk, mint a szimmetrikus formáét.

Ha $\boldsymbol{R}$ hermitikus forma, akkor $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ valós minden $\boldsymbol{x}$-re, és így nem üres tartalmat nyer a **pozitív definit**, **pozitív szemidefinit** stb. tulajdonság.

A hermitikus forma szerint ortogonális bázis fogalmát is bevezetjük, és a bizonyítást szinte szó szerint lemásolva igzolhatjuk a 18.6. állítást hermitikus formára. Azon múlik a dolog, most a $(*)$ formula az

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = -\sum_{i\in F_z} |\alpha_i|^2 |\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i)| = \sum_{k\in F_p'} |\beta_k|^2 \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_k',\boldsymbol{v}_k')$$

alakot ölti.

Ha $^* : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ a komplex konjugálás és $\boldsymbol{R} : \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ bilineáris forma, akkor $(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}) \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi})$ szeszkilineáris. Így tehát minden komplex mátrix ($\equiv$ bilineáris forma) egyben szeszkilineáris formának is tekinthető.

Az $(\alpha_{ik} \mid i,k = 1,\dots,\mathbf{N})$ komplex mátrix mint szeszkilineáris forma pontosan akkor hermitikus, ha $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}^*$ minden $i,k = 1,\dots,N$ estén, azaz egyenlő a transzponáltjának a konjugáltjával.

18.9. Ha $\boldsymbol{R} : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris vagy szeszkilineáris forma, akkor a $\mathbf{V} \to \mathbb{K}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ leképezést az $\boldsymbol{R}$-hez tartozó **kvadratikus formának** nevezzük.

Különböző bilineáris formákhoz tartozhat ugyanaz a kvadratikus forma: ha két bilineáris forma szimmetrikus része megegyezik, akkor a megfelelő kvadratikus formák is egyenlők. Viszont különböző szimmetrikus formákhoz különböző kvadratikus formák tartoznak. Ezt a következő úgynevezett **polarizációs formulából** láthatjuk, amely szimmetrikus bilineáris forma értékeit adja meg a megfelelő kvadratikus forma értékeivel.

Ha $\boldsymbol{R}$ szimmetrikus bilineáris forma, akkor

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4}\big(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\big) \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{V}).$$

Külön érdekesek a szeszkilineáris formák, mert ilyet egyértelműen meghatároz a megfelelő kvadratikus forma; egyszerű számolás mutatja, hogy ha $\boldsymbol{R}$ szeszkilineáris forma, akkor

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N+1} i^k \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}+i^k\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+i^k\boldsymbol{y}).$$

Ha $\boldsymbol{R}$ hermitikus, akkor

$$\mathrm{Re}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4}\big(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\big),$$

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{4}\big(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y})\big).$$

18.10. Feladatok

1. Tekintsük a szokásos $(\mathbb{R}^3)^\star \equiv \mathbb{R}^3$ azonosítást és ennek alapján adjuk meg az $(1,1,i)\otimes(1,2,3)$, $(1,1,i)\vee(1,2,3)$ és az $(1,1,i)\wedge(1,2,3)$ mátrixot!

2. Adjuk meg a 18.7-ben szereplő bázis olyan átrendezését, amellyel az idézett mátrixhoz jutunk!

3. Értelmezzük a szimmetrikusság, antiszimmetrikusság valamint a mag fogalmát $\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ bilineáris leképezésre. Melyek általánosíthatók az ilyenekre a fejezet eredményei közül?

4. Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben az $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ mátrixú szimmetrikus bilineáris forma szerint ortogonális bázist! Határozzuk meg ennek a bilineáris formának a definitási tulajdonságát!

5. Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben az $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ mátrixú antiszimmetrikus bilineáris formához a 18.7 szerint megkonstruált bázist!

6. Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ban a $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrixú szimmetrikus bilineáris forma szerint ortogonális bázist!

7. A Pauli mátrixok (lásd 11.7.3.) hermitikus formák $\mathbb{C}^2$-n. Adjuk meg a szerintük ortogonális bázisokat!

8. Mutassuk meg, hogy a bilináris formák szimmetrikus és antiszimmetrikus részének a definíciója összhangban van a $\mathrm{Lin}^2(\mathbf{V}\times\mathbf{V})\equiv\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{V}^\star)$ azonosítással és a 14.5-ben mondottakkal.

9. Igazoljuk a 18.6. eredménye alapján, hogy egy $\boldsymbol{R}$ pozitív szemidefinit bilineáris formára $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ pontosan akkor teljesül, ha $\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}\boldsymbol{R}$.

Lássuk be továbbá, ha $\boldsymbol{R}_1$ és $\boldsymbol{R}_2$ ugyanazon a vektortéren adott pozitív szemidefinit szimmetrikus bilineáris formák, akkor $\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2$ is pozitív szemidefinit, és pontosan akkor pozitív definit, ha $(\mathrm{Ker}\boldsymbol{R}_1)\cap(\mathrm{Ker}\boldsymbol{R}_2)=\{\mathbf{0}\}$ (ami teljesül például, ha az egyik pozitív definit).

10. Adjunk példát arra, hogy két szimmetrikus bilineáris forma közül az egyik vagy egyik sem pozitív szemidefinit, az összegük mégis az.

11. Legyen $\boldsymbol{R}$ szimmetrikus (hermitikus) vagy antiszimmetrikus forma $\mathbf{V}$-n. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{V}/\mathrm{Ker}\boldsymbol{R}$-en az $(\boldsymbol{x}+\mathrm{Ker}\boldsymbol{R},\boldsymbol{y}+\mathrm{Ker}\boldsymbol{R})\mapsto\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ formulával jól definiált, nem elfajuló szimmetrikus (hermitikus) illetve antiszimmetrikus formát értelmeztünk.

19. Multilineáris leképezések

19.1. Definíció *Legyen n pozitív egész szám, $\mathbf{V}_k$ $(k = 1, \dots, n)$ és $\mathbf{W}$ vektortér (azonos $\mathbb{K}$ test felett). Az $\boldsymbol{R} : \bigtimes_{k=1}^{n} \mathbf{V}_k \to \mathbf{W}$ leképezést n-**lineárisnak** nevezzük, ha bármelyik $n-1$ változójának rögzítése mellett a maradék változóban lineáris.*

***Multilineárisnak** mondunk egy leképezést, ha n-lineáris valamely n esetén.*

Tehát, ha nem akarjuk – például szükségtelen – pontosítani, milyen n-re definiált n-lineáris leképezésről van szó, multilineárisról beszélünk.

A multilineáris leképezések meghatározó tulajdonsága egyenéretékű azzal, hogy

$$\boldsymbol{R}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \sum_{j=1}^{s} \beta_j \boldsymbol{y}_j, \dots, \sum_{k=1}^{t} \gamma_k \boldsymbol{z}_k\right) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \cdots \sum_{k=1}^{t} \alpha_i \beta_j \dots \gamma_k \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j, \dots, \boldsymbol{z}_k),$$

ahol a szokásos jeleket használtuk lineáris kombinációkra.

A $\bigtimes_{k=1}^{n} \mathbf{V}_k \to \mathbf{W}$ n-lineáris leképezések a pontonkénti művelettel ellátva vektorteret alkotnak. Jelölje ezt a vektorteret

$$\mathrm{Lin}^n\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \mathbf{V}_k, \mathbf{W}\right).$$

19.2. A következő leképezések multilineárisak.

(i) $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \prod_{k=1}^{n} \xi_k$;

(ii) $\mathbf{P}$ a polinomok vektortere, $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}$, $(p_1, \dots, p_n) \mapsto \prod_{k=1}^{n} p_k$;

(iii) $(\mathbb{K}^N)^3 \to \mathbb{K}$, $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \mapsto \sum_{k=1}^{N} \xi_k \eta_k \zeta_k$.

19.3. A 17.10.3. feladat most következő általánosítása sokszor jó szolgálatot tesz (például a differenciálszámításban).

Állítás *Legyen n pozitív egész szám, $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ és $\mathbf{W}$ vektortér. Ekkor az*

$$i : \mathrm{Lin}\left(\mathbf{V}_n, \mathrm{Lin}^{n-1}\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n-1} \mathbf{V}_i, \mathbf{W}\right)\right) \to \mathrm{Lin}^n\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i, \mathbf{W}\right),$$

$$i(\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) := (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_n)(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1})$$

$$\left(\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}\left(\mathbf{V}_n, \mathrm{Lin}^{n-1}\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n-1} \mathbf{V}_i, \mathbf{W}\right)\right), \boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{V}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbf{V}_n\right)$$

leképezés lineáris bijekció.

Bizonyítás Az i leképezés nyilvánvalóan lineáris és injekció, mert $i(\boldsymbol{B}) = \mathbf{0}$ maga után vonja, hogy $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.

Ha $\boldsymbol{R} \in \mathrm{Lin}^n\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i, \mathbf{W}\right)$, akkor minden $\boldsymbol{x}_n \in \mathbf{V}_n$ esetén az $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}) \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n)$ leképezés $(n-1)$-lineáris; könnyű látni, hogy a $j(\boldsymbol{R}) : \mathbf{V}_n \to \mathrm{Lin}^{n-1}\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n-1} \mathbf{V}_i, \mathbf{W}\right)$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{R}(\cdot, \dots, \cdot, \boldsymbol{x})$ leképezés lineáris és $i(j(\boldsymbol{R})) = \boldsymbol{R}$, tehát i ráképezés (és így bijekció, az inverze j). ■

Noha az iménti bizonyítás roppant egyszerű, az állítás tartalma nem szembeszökő, ezért érdemes körüljárni, miről is van szó. Talán az a legjobb, ha fordított irányban megyünk, vagyis az i helyett a j leképezést vesszük szemügyre. Ha egy n-lineáris leképezés egy változóját rögzítjük, akkor $(n-1)$-lineáris leképezést kapunk, és a rögzített változótól lineárisan függ, milyen lesz ez az $(n-1)$-lineáris leképezés.

Szokásosan a tárgyalt izomorfizmussal azonosítjuk a szóban forgó vektortereket, vagyis elhagyjuk az i illetve j jelölését és azt írjuk (az előbb említett fordított ránézéssel), hogy

$$\mathrm{Lin}^n\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i, \mathbf{W}\right) \equiv \mathrm{Lin}\left(\mathbf{V}_n, \mathrm{Lin}^{n-1}\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n-1} \mathbf{V}_i, \mathbf{W}\right)\right),$$

$$\boldsymbol{B} \equiv \big(\boldsymbol{x}_n \mapsto \boldsymbol{B}(\cdot, \dots, \cdot, \boldsymbol{x}_n)\big).$$

Ezt tovább „ragozhatjuk”. A jobb oldalon szereplő $(n-1)$-lineáris leképezésre is alkalmazható az azonosítás,

$$\mathrm{Lin}^{n-1}\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n-1} \mathbf{V}_i, \mathbf{W}\right) \equiv \mathrm{Lin}\left(\mathbf{V}_{n-1}, \mathrm{Lin}^{n-2}\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n-2} \mathbf{V}_i, \mathbf{W}\right)\right),$$

és ezt betehetjük az előbbi formulába. Továbbá úgy is alkalmazható az azonosítás, hogy a Descartes-szorzatban a két utolsó tényezőt eggyé csoportosítjuk. Közelebbről tehát

$$\mathrm{Lin}^n\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i,\mathbf{W}\right)\equiv\mathrm{Lin}\left(\mathbf{V}_n,\mathrm{Lin}\left(\mathbf{V}_{n-1},\mathrm{Lin}^{n-2}\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n-2}\mathbf{V}_i,\mathbf{W}\right)\right)\right),\qquad (*)$$

$$\mathrm{Lin}^n\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i,\mathbf{W}\right)\equiv\mathrm{Lin}^2\left(\mathbf{V}_{n-1}\times\mathbf{V}_n,\mathrm{Lin}^{n-2}\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n-2}\mathbf{V}_i,\mathbf{W}\right)\right),\qquad (**)$$

és persze ezért a két jobb oldal is azonosítható. Ezt folytathatjuk tovább három, négy stb. változó „áthelyezésével”, így a $(*)$ jobb oldala egyre bonyolultabb, áttekinthetetlenebb lesz, végül $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}_n,\mathrm{Lin}(\mathbf{V}_{n-1},\dots,\mathrm{Lin}(\mathbf{V}_1,\mathbf{W})\dots))$ adódik. A bal oldali objektum viszont nagyon egyszerű, és nem lesz túl bolnyolult a $(**)$ jobb oldala sem; ez az egyik fontos gyakorlati jelentősége az azonosításnak: bonyolult objektumok egyszerűvé válnak.

19.4. A gyakorlatban azok a legfontosabb multilineáris leképezések, amelyek minden változója ugyanabból a vektortérből való, azaz $\mathbf{V}_k=\mathbf{V}$ minden k esetén.

Vegyük az $\{1,,\dots,n\}$ egy π permutációját, és definiáljuk az $\boldsymbol{R}:\mathbf{V}^n\to\mathbf{W}$ n-lineáris leképezés π-permutáltját:

$$\boldsymbol{R}_\pi:\mathbf{V}^n\to\mathbf{W},\quad(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)\mapsto\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_{\pi(1)},\dots,\boldsymbol{x}_{\pi(n)}).$$

Nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{R}_\pi$ is n-lineáris. $\boldsymbol{R}$ **szimmetrikus** illetve **antiszimmetrikus**, ha

$$\boldsymbol{R}_\pi=\boldsymbol{R},\quad\text{illetve}\quad\boldsymbol{R}_\pi=(\mathrm{sign}\pi)\boldsymbol{R}$$

minden $\pi\in\mathrm{Perm}_n$ esetén.

Más szóval, egy n-lineáris leképezés szimmetrikus, ha értéke ugyanaz a változóinak bármely átrendezése esetén; antiszimmetrikus, ha változóinak páratlan permutációjú átrendezése esetén előjelet vált, páros permutációjú átrendezésénél viszont nem változtatja az értékét.

Például, ha $\boldsymbol{R}:\mathbf{V}^3\to\mathbf{W}$ antiszimmetrikus, akkor minden $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbf{V}$ esetén

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=&\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\\=-&\boldsymbol{R}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

A szimmetrikus illetve antiszimmetrikus n-lineáris leképezések egy-egy lineáris alteret alkotnak az n-lineáris leképezések vektorterében. Ez a két altér független – azaz csak a nulla a közös elemük –, azonban, ha $n>2$ és $\dim\mathbf{V}>1$, már nem kiegészítő alterek, amint ezt a következő fejezetben látjuk (lásd a 19.8.3. feladatot is).

Bármely $\boldsymbol{R} : \mathbf{V}^n \to \mathbf{W}$ n-lineáris leképezésnek definiáljuk a **szimmetrikus** illetve **antiszimmetrikus részét**:

$$S\boldsymbol{R} := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} \boldsymbol{R}_\pi, \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} (\mathrm{sign}\pi) \boldsymbol{R}_\pi.$$

19.5. Állítás *Az $\boldsymbol{R} : \mathbf{V}^n \to \mathbf{W}$ n-lineáris leképezés akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0}$ valahányszor $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ közül kettő megegyezik.*

Bizonyítás A feltétel szükségessége nyilvánvaló, hiszen az azonos két változót felcserélve egyrészt semmi sem változik, másrészt a forma értéke előjelet vált.

Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{R}$ rendelkezik a fenti tulajdonsággal. Ekkor a $\mathbf{V}$ minden $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbf{V}$ eleme esetén

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \\
= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3, \dots, \boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \dots, \boldsymbol{x}_n) + \\
+ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3, \dots, \boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \dots, \boldsymbol{x}_n).
\end{aligned}$$

Az itt szereplő tagok közül az első és a negyedik nulla, ezért

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3, \dots, \boldsymbol{x}_n) = -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \dots, \boldsymbol{x}_n).$$

Ugyanilyen eredményre jutunk az 1 és 2 index helyett bármelyik i és j indexre. Mivel minden permutáció transzpozíciók kompozíciója (szorzata), és a permutáció akkor páros illetve páratlan, ha az őt előállító transzpozíciók száma páros illetve páratlan, az állítást igazoltuk.

19.6. Állítás *Ha $\boldsymbol{R} : \mathbf{V}^n \to \mathbf{W}$ antiszimmetrikus n-lineáris leképezés és $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ a $\mathbf{V}$ lineárisan összefüggő elemei, akkor $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0}$.*

Bizonyítás Van a szóban forgó vektorok között olyan, amely a többiek lineáris kombinációja; az általánosság megszorítása nélkül vehetjük úgy, hogy $\boldsymbol{x}_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$. Ekkor

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, x_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{R}\left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\right) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0},$$

mert az utolsó öszeg minden tagja nulla az előzőekben mondottak szerint.

19.7. Az előző állítás fordítottja általában nem igaz: egy nemnulla antiszimmetrikus multilineáris leképezés lineárisan független vektorokon is vehet fel nulla értéket (lásd a 20.8.1. feladatot). A kivételt a következő állítás adja meg.

Állítás *Ha* $\dim \mathbf{V} = N < \infty$, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{R} : \mathbf{V}^N \to \mathbf{W}$ *N-lineáris antiszimmetrikus leképezés,* $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N \in \mathbf{V}$ *lineárisan függetlenek (tehát bázist alkotnak), akkor* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N) \neq 0$.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N) = 0$. Bármilyen $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N$ vektor az adott bázisvektorok lineáris kombinációja,

$$\boldsymbol{x}_k = \sum_{i_k=1}^{N} \alpha_{i_k k} \boldsymbol{v}_{i_k}, \qquad (k = 1, \dots, N),$$

tehát

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_N=1}^{N} \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_N N} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_N}).$$

Ha a jobb oldali összeg valamelyik tagjában $\boldsymbol{R}$ két változója megegyezik, akkor az a tag nulla; ha viszont $\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_N}$ mind különbözők, akkor van olyan $\pi \in \mathrm{Perm}_n$, hogy $\boldsymbol{v}_{i_k} = \boldsymbol{v}_{\pi(k)}$ $(k = 1, \dots, N)$. Ez a feltevésünk szerint maga után vonja, hogy $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N) = 0$ minden $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N \in \mathbf{V}$ esetén ami ellentmond annak, hogy $\boldsymbol{R} \neq \mathbf{0}$.

19.8. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy egy szimmetrikus multilineáris leképezés szimmetrikus része önmaga, antiszimmetrikus része pedig nulla. Értelemszerűen hasonló állítás igaz antiszimmetrikus multilineáris leképezésre is.

2. Ha $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2$, ahol $\boldsymbol{R}_1$ szimmetrikus, $\boldsymbol{R}_2$ antiszimmetrikus n-lineáris leképezés, akkor $S\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1$, $A\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_2$.

3. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$, $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \mapsto \xi_1 \eta_2 \zeta_3$ trilineáris leképezés nem állítható elő egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus trilineáris forma összegeként (nem egyenlő a szimmetrikus részének és az antiszimmetrikus részének az összegével).

4. Igazoljuk a $\mathrm{Lin}^n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}$, $\boldsymbol{R} \equiv \boldsymbol{R}(1, 1, \dots, 1)$ azonosítást, amelynek megfelelően $\alpha \in \mathbb{K}$ a $(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \alpha \prod_{k=1}^{n} \xi_k$ n-lineáris leképezéssel azonos.

5. Fogalmazzunk meg állítást a 17.1. végén mondottakhoz hasonlóan arra vonatkozóan, hogy n-lineáris leképezés és lineáris leképezések megfelelő komozíciója szintén n-lineáris.

20. Multilineáris formák

20.1. Legyen n pozitív egész szám. A $\mathbf{V}^n \to \mathbb{K}$ n-lineáris leképezéseket $\mathbf{V}$-n adott n-**lineáris formáknak** nevezzük.

Legyen $\boldsymbol{p}_k \in \mathbf{V}^\star$ $(k = 1, \ldots, n)$, és definiáljuk a következő n-lineáris formákat:

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k : \mathbf{V}^n \to \mathbb{K}, \quad (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \mapsto \prod_{k=1}^{n} (\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}_k), \tag{1}$$

$$\mathop{\triangledown}_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k := S \bigotimes_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k, \qquad \bigvee_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k := n! \mathop{\triangledown}_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k,$$

$$\mathop{\triangle}_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k := A \bigotimes_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k, \qquad \bigwedge_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k := n! \mathop{\triangle}_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k.$$

Bilineáris leképezésekel kapcsolatban már említettük, hogy matematikakönyvekben kizárólag a $\wedge$ és $\vee$ jel jelenik meg, de hol a mi általunk is így definiált mennyiséget, hol a mi általunk a $\triangledown$ illetve $\triangle$ jelekkel definiált mennyiséget értik alatta. A kétféle jel bevezetésével erre a kettősségre hívjuk fel a figyelmet; a továbbiakban azonban csak a $\wedge$ és $\vee$ jelekkel meghatározott mennyiségeket használjuk.

Vezessük be rendre a

$$\overset{n}{\otimes} \mathbf{V}^\star, \qquad \overset{n}{\vee} \mathbf{V}^\star, \qquad \overset{n}{\wedge} \mathbf{V}^\star$$

jeleket a fent definiált n-lineáris formák által $\mathrm{Lin}^n(\mathbf{V}^n, \mathbb{K})$-ban kifeszített altérre.

20.2 Vegyük közelebbről szemügyre a fenti formákat. Ha $\pi \in \mathrm{Perm}_n$, akkor

$$\prod_{k=1}^{n} (\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}_{\pi(k)}) = \prod_{i=1}^{n} (\boldsymbol{p}_{\pi^{-1}(i)}|\boldsymbol{x}_i),$$

tehát

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k\right)_\pi = \bigotimes_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_{\pi^{-1}(k)}. \tag{$*$}$$

Következésképpen,

$$\bigvee_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k = \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} \bigotimes_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_{\pi(k)},$$

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k = \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} \mathrm{sign}\pi \bigotimes_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_{\pi(k)},$$

hiszen miközben π^{-1} befutja az $\{1, \ldots, n\}$ összes permutációját, π is befutja. Részletesebben tehát

$$\left(\bigvee_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} \prod_{k=1}^{n} (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}_{\pi(k)}) = \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} \prod_{k=1}^{n} (\boldsymbol{p}_{\pi(k)}|\boldsymbol{x}_k), \tag{2}$$

$$\left(\bigwedge_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n) = \sum_{\pi\in\mathrm{Perm}_n} \mathrm{sign}\pi \prod_{k=1}^{n} (\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}_{\pi(k)}) = $$
$$= \sum_{\pi\in\mathrm{Perm}_n} \mathrm{sign}\pi \prod_{k=1}^{n} (\boldsymbol{p}_{\pi(k)}|\boldsymbol{x}_k). \tag{3}$$

Például tehát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_1\vee\boldsymbol{p}_2\vee\boldsymbol{p}_3 =& \boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_3\otimes\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_3\otimes\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2\\ &+\boldsymbol{p}_3\otimes\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_3\otimes\boldsymbol{p}_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_1\wedge\boldsymbol{p}_2\wedge\boldsymbol{p}_3 =& \boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_3\otimes\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_3\otimes\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2\\ &-\boldsymbol{p}_3\otimes\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_3\otimes\boldsymbol{p}_2.\end{aligned}$$

A $(*)$ összefüggésből

$$\bigvee_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_{\pi(k)} = \bigvee_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k, \qquad \bigwedge_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_{\pi(k)} = \mathrm{sign}\pi \bigwedge_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k.$$

A definícióból nyilvánvaló, hogy

$$(\mathbf{V}^\star)^n \to \mathrm{Lin}^n(\mathbf{V}^n,\mathbb{K}), \quad (\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n)\mapsto \bigotimes_{k=1}^{n}\boldsymbol{p}_k$$

n-lineáris leképezés, és az előző két formula alapján megállapíthatjuk, hogy

$$(\mathbf{V}^\star)^n \to \mathrm{Lin}^n(\mathbf{V}^n,\mathbb{K}), \quad (\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n)\mapsto \bigvee_{k=1}^{n}\boldsymbol{p}_k,$$

$$(\mathbf{V}^\star)^n \to \mathrm{Lin}^n(\mathbf{V}^n,\mathbb{K}), \quad (\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n)\mapsto \bigwedge_{k=1}^{n}\boldsymbol{p}_k$$

szimmetrikus illetve antiszimmetrikus n-lineáris leképezés.

Jegyezzük meg, ebből adódik az a fontos tény, hogy ha $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$ közül legalább kettő párhuzamos egymással, akkor $\bigwedge_{k=1}^{n}\boldsymbol{p}_k = \mathbf{0}$.

20.3. A 18.4. állítás bizonyításának mintájára igazolhatjuk, hogy ha $\dim\mathbf{V} = N < \infty$ és $\{\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_N\}$ a $\mathbf{V}^\star$ egy bázisa, akkor

$$\left\{\bigotimes_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_{k_i}\;\middle|\; 1\le k_i\le N, i=1,\dots,n\right\},$$

$$\left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} \boldsymbol{p}_{k_i} \;\middle|\; 1 \le k_1 \le k_2 \le \dots \le k_n \le N, \right\},$$

$$\left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} \boldsymbol{p}_{k_i} \;\middle|\; 1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_n \le N \right\}$$

rendre bázis $\overset{n}{\otimes}\mathbf{V}^\star$-ban, $\overset{n}{\vee}\mathbf{V}^\star$-ban és $\overset{n}{\wedge}\mathbf{V}^\star$-ban. Következésképpen – az N elem n-ed rendű ismétléses variációinak, n-ed rendű ismétléses kombinációinak és n-ed rendű kombinációinak számát tudva – megállapíthatjuk, hogy

$$\dim\left(\overset{n}{\otimes}\mathbf{V}^\star\right) = (\dim\mathbf{V})^n = N^n,$$

$$\dim\left(\overset{n}{\vee}\mathbf{V}^\star\right) = \binom{N+n-1}{n}, \qquad \dim\left(\overset{n}{\wedge}\mathbf{V}^\star\right) = \begin{cases} \binom{N}{n}, & \text{ha } n \le N, \\ 0 & \text{ha } n > N. \end{cases}$$

Ez azt is mutatja, hogy ha $N > 1$ és $n > 2$, akkor a szimmetrikus n-lineáris formák altere és az antiszimmetrikus n-lineáris formák altere nem kiegészítők: a dimenziójuk összege kisebb az n-lineáris formák terének dimenziójánál.

Két fontos tényt állapíthatunk meg a mondottakból: ha $\dim\mathbf{V} = N < \infty$, akkor a

(i) $\overset{n}{\otimes}\mathbf{V}^\star = \mathrm{Lin}^n(\mathbf{V}^n, \mathbb{K})$, továbbá $\overset{n}{\vee}\mathbf{V}^\star$ és $\overset{n}{\wedge}\mathbf{V}^\star$ egyenlő a $\mathbf{V}^n \to \mathbb{K}$ szimmetrikus illetve antiszimmetrikus n-lineáris formák alterével,

(ii) Az N-lineáris antiszimmetrikus formák vektorterének a dimenziója 1: $\dim\left(\overset{N}{\wedge}\mathbf{V}^\star\right) = 1$.

20.4. Az antiszimmetrikus multilineáris formákat **külső formáknak** is szokás nevezni, és az antiszimmetrikus n-lineáris forma helyett egyszerűen n-**formát** szokás mondani.

A külső formákra vonatkozóan különösen fontosak a 19.6.-19.7. állítások, ezért megismételjük őket:

– ha $\boldsymbol{R}$ n-forma és $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ lineárisan összefüggők, akkor $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = 0$,

– ha $\dim\mathbf{V} = N < \infty$ és $\boldsymbol{R} \ne \mathbf{0}$ N-forma, $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N \in \mathbf{V}$ lineárisan függetlenek, akkor $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N) \ne 0$.

Még egy fontos, sokat használt formula, amely a 20.2-ben mondottakból következik: ha $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N$ a $\mathbf{V}$ bázisa és $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N$ ennek a duálisa, akkor

$$\left(\overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N) = 1. \qquad (*)$$

20.5. $\mathbb{K}^N$-en az n-lineáris formákat n indexes **hipermátrixokkal**, vagyis a $\mathbb{K}^{N\times N\times\ldots\times N}$ elemeivel azonosíthatjuk.

A $(\rho_{ij\dots k} \mid i,j,\dots,k = 1,\dots,n)$ hipermátrix a következő n-lineáris formának felel meg:

$$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\dots,\boldsymbol{\zeta}) \mapsto \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\cdots\sum_{k=1}^{N}\rho_{ij\dots k}\xi_i\eta_j\dots\zeta_k.$$

Vegyük észre, hogy $\rho_{ij\dots k}$ éppen a multilineáris formának az $(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\dots,\boldsymbol{e}_k)$ helyen felvett értéke, ahol $\boldsymbol{e}_i$ az i-edik standard bázisvektor.

A multilineáris forma pontosan akkor szimmetrikus illetve antiszimmetrikus, ha a hipermátrixa szimmetrikus illetve antiszimmetrikus a következő értelemben:

$$\rho_{\pi(i)\pi(j)\dots\pi(k)} = \rho_{ij\dots k},$$

illetve

$$\rho_{\pi(i)\pi(j)\dots\pi(k)} = (\mathrm{sign}\pi)\rho_{ij\dots k}$$

minden $\pi \in \mathrm{Perm}_n$ esetén.

Antiszimmetrikus hipermátrix olyan tagja, amely azonos indexeket is tartalmaz, nulla. A szemléltetés kedvéért vegyük a három indexes Levi–Civita-hipermátrixot:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1,$$

$$\epsilon_{ijk} = 0 \quad \text{ha } i,\ j,\ k \text{ közül kettő megegyezik.}$$

Az N dimenziós vektortéren adott n-lineáris formákat a vektortér koordinátázása segítségével n indexes hipermátrixokkal reprezentálhatjuk. Az $\boldsymbol{R}$ n-lineáris forma hipermátrixa a $(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázisnak megfelelő $\boldsymbol{K}$ koordinátázásban

$$\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{K}^{-1}\times\dots\times\boldsymbol{K}^{-1}) = \big(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j,\dots,\boldsymbol{v}_k) \mid i,j,\dots,k = 1,\dots,N\big).$$

$\boldsymbol{R}$ pontosan akkor szimmetrikus illetve antiszimmetrikus, ha bármely bázisra vonatkozó hipermátrixa szimmetrikus illetve antiszimmetrikus.

20.6. Megfordíthatjuk $\mathbf{V}$ és $\mathbf{V}^\star$ szerepét, hiszen $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}^{\star\star}$. Ennek megfelelően, ha $\boldsymbol{x}_k \in \mathbf{V}$ $(k = 1,\dots,n)$, definiálhatjuk a következő n-lineáris formákat $\mathbf{V}^\star$-on:

$$\bigotimes_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k : (\mathbf{V}^\star)^n \to \mathbb{K}, \quad (\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n) \mapsto \prod_{k=1}^{n}(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}_k),$$

$$\bigvee_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k := n!S\bigotimes_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k,$$

$$\bigwedge_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k := n!A\bigotimes_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k,$$

és jelöljük rendre az ilyen n-lineáris formák által $\mathrm{Lin}^n((\mathbf{V}^\star)^n,\mathbb{K})$-ban kifeszített altereket a

$$\overset{n}{\otimes}\mathbf{V},\qquad \overset{n}{\vee}\mathbf{V},\qquad \overset{n}{\wedge}\mathbf{V}$$

szimbólumokkal.

Ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor $\overset{n}{\otimes}\mathbf{V}=\mathrm{Lin}^n((\mathbf{V}^\star)^n,\mathbb{K})$, továbbá $\overset{n}{\vee}\mathbf{V}$ és $\overset{n}{\wedge}\mathbf{V}$ egyenlő a $(\mathbf{V}^\star)^n\to\mathbb{K}$ szimmetrikus illetve antiszimmetrikus n-lineáris formák alterével.

Könnyen igazolhatjuk a következő formulákat, amelyeket gyakran fogunk használni:

$$\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}}\boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)=(\overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}}\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n),$$

$$\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\vee}}\boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)=(\overset{n}{\underset{k=1}{\vee}}\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n),$$

$$\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}}\boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)=(\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}}\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n),$$

ahol ezeknek a kifejezéseknek az értékét a 20.1. (1) és a 20.2. (2)-(3) képletek adják meg. Megkérjük az olvasót, bizonyítsa be, hogy az alábbi azonosítások helyénvalók (vagyis az adott formulákkal lineáris injekciót határozunk meg a szóban forgó vektorterek között):

$$\overset{n}{\otimes}\mathbf{V}^\star \Rrightarrow \left(\overset{n}{\otimes}\mathbf{V}\right)^\star,\qquad \left(\overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}}\boldsymbol{p}_k\;\middle|\;\overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}}\boldsymbol{x}_k\right)\equiv\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}}\boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n),$$

$$\overset{n}{\vee}\mathbf{V}^\star \Rrightarrow \left(\overset{n}{\vee}\mathbf{V}\right)^\star,\qquad \left(\overset{n}{\underset{k=1}{\vee}}\boldsymbol{p}_k\;\middle|\;\overset{n}{\underset{k=1}{\vee}}\boldsymbol{x}_k\right)\equiv\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\vee}}\boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n),$$

$$\overset{n}{\wedge}\mathbf{V}^\star \Rrightarrow \left(\overset{n}{\wedge}\mathbf{V}\right)^\star,\qquad \left(\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}}\boldsymbol{p}_k\;\middle|\;\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}}\boldsymbol{x}_k\right)\equiv\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}}\boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n),$$

és ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor $\equiv$ áll $\Rrightarrow$ helyett.

20.7. Természetesen most is igaz, hogy

$$\mathbf{V}^n\to\mathrm{Lin}^n((\mathbf{V}^\star)^n,\mathbb{K}),\quad (\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)\mapsto\overset{n}{\underset{k=1}{\vee}}\boldsymbol{x}_k,$$

$$\mathbf{V}^n\to\mathrm{Lin}^n((\mathbf{V}^\star)^n,\mathbb{K}),\quad (\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)\mapsto\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}}\boldsymbol{x}_k$$

szimmetrikus illetve antiszimmetrikus n-lineáris leképezés.

Ez utóbbinak fontos következményét találjuk.

Állítás *$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n\in\mathbf{V}$ pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha $\boldsymbol{x}_1\wedge\dots\wedge\boldsymbol{x}_n\neq\mathbf{0}$.*

Bizonyítás Ha lineárisan összefüggők, akkor valamelyik a többiek lineáris kombinációja. Az általánosság megszorítása nélkül vehetjük úgy, hogy $\boldsymbol{x}_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$. Ekkor

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_k = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}.$$

Ha lineárisan függetlenek, akkor van olyan $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbf{V}^\star$, hogy $(\boldsymbol{p}_i|\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$, tehát

$$\left(\bigwedge_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_k\right)(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n) = \prod_{k=1}^{n} (\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}_k) = 1 \neq 0.$$

20.8. Feladatok

1. Vegyük az N dimenziós $\mathbf{V}$ vektortéren a nem nulla $\boldsymbol{p}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{p}_n$ n-formát ($n < N$). Ekkor van olyan $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, hogy $(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}) = 0$ minden k-ra. Találjunk ezután $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ lineárisan független vektorokat úgy, hogy $(\boldsymbol{p}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{p}_n)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = 0$.
2. Bizonyítsuk be a 19.7. állítást N-formákra a következő útmutatás alapján. Az N-formák vektortere egy dimenziós. Ha tehát $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ a $\mathbf{V}$ bázisa és $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N$ a duálisa, akkor $\boldsymbol{p}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{p}_N$ az $\boldsymbol{R}$ számszorosa.

21. Determinánsok

21.1. Legyen $\mathbf{V}$ véges N dimenziós vektortér, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. Ha $\boldsymbol{R}$ a $\mathbf{V}$-n adott N-forma, akkor $\boldsymbol{R} \circ (\overset{N}{\times} \boldsymbol{A})$ szintén N-forma; ne feledjük, ez utóbbi az $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_N)$ leképézés.

Könnyű látni, hogy a $\boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R} \circ (\overset{N}{\times} \boldsymbol{A})$ hozzárendelés lineáris. A 20.3. végén tett megjegyzésnek megfelelően a $\mathbf{V}$-n adott N-formák tere, $\overset{N}{\wedge} \mathbf{V}^\star$ egy dimenziós, így a lineáris leképezései számokkal azonosíthatók (lásd 10.6.) Tehát létezik egy egyértelműen meghatározott $\det \boldsymbol{A}$-val jelölt szám, az $\boldsymbol{A}$ **determinánsa**, amellyel

$$\boldsymbol{R} \circ (\overset{N}{\times} \boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{R}$$

minden $\boldsymbol{R} \in \overset{N}{\wedge} \mathbf{V}^\star$ esetén.

A definícióból azonnal adódik, hogy

$$\det(\alpha \mathrm{id}_{\mathbf{V}}) = \alpha^N \qquad (\alpha \in \mathbb{K}).$$

21.2. Állítás *Legyen* $\mathbf{V}$ *mint az előbb, és* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. *Ekkor*

$$\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B}).$$

Következésképpen $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ *pontosan akkor, ha* $\boldsymbol{A}$ *bijekció, és ekkor*

$$\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}.$$

Bizonyítás Legyen $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{R} \in \overset{N}{\wedge} \mathbf{V}^\star$. Ekkor

$$\det(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R} \circ (\overset{N}{\times} \boldsymbol{AB}) = ((\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{R}) \circ (\overset{N}{\times} \boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{B})(\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{R}.$$

Ha $\boldsymbol{A}$ bijekció, akkor $1 = \det(\mathrm{id}_{\mathbf{V}}) = \det(\boldsymbol{AA}^{-1}) = (\det \boldsymbol{A}^{-1})(\det \boldsymbol{A})$, és így $\det \boldsymbol{A} \neq 0$,továbbá $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}$.

Ha $\boldsymbol{A}$ nem bijekció, akkor a $\mathbf{V}$ egy bázisát lineárisan összefüggő halmazba képezi, ezért 20.4. szerint bármely $\boldsymbol{R}$ N-formára $\boldsymbol{R} \circ (\overset{N}{\times} \boldsymbol{A}) = 0$, azaz $\det \boldsymbol{A} = 0$. ■

Megjegyezzük azt a nyilvánvaló, sokszor felhasznált tényt, hogy

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{BA}).$$

21.3. Állítás *Legyen* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ *a* $\mathbf{V}$ *indexezett bázisa. Ekkor*

$$\overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{Av}_k = (\det \boldsymbol{A}) \overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{v}_k.$$

Bizonyítás Legyen $(\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N) \in \mathbf{V}^\star$. A 20.6-ban mondottak szerint

$$\left(\overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{Av}_k\right)(\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N) = \left(\overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{Av}_1, \dots, \boldsymbol{Av}_N) =$$
$$= (\det \boldsymbol{A}) \left(\overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N) =$$
$$= \left((\det \boldsymbol{A}) \overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{v}_k\right)(\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N).$$

21.4. Állítás *Legyen* $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ *a* $\mathbf{V}$ *indexezett bázisa,* $(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ *ennek a duálisa. Ekkor az* $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris leképezésre*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} \mathrm{sign}\pi \prod_{k=1}^{N} (\boldsymbol{p}_{\pi(k)} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k) = \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} \mathrm{sign}\pi \prod_{k=1}^{N} (\boldsymbol{p}_k | \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_{\pi(k)}).$$

Következésképpen $\det(\boldsymbol{A}^\star) = \det \boldsymbol{A}$*.*

Bizonyítás A 20.4. $(*)$ formula és 20.6-ban mondottak szerint

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A}) \left[\left(\bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{p}_k \right) (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N) \right] = \left(\bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{p}_k \right) (\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_N),$$

és most már csak a 20.2. (3) összefüggését kell alkalmaznunk, hogy megkapjuk a kívánt formulát.

Ebből közvetlenül származtathatjuk a transzponált determinánsára vonatkozó formulát. Mindössze azt kell észrevennünk, hogy $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ a $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N$ bázis duálisa, tehát $\boldsymbol{A}^\star$ determinánsát úgy kapjuk, hogy a fenti formulában $\boldsymbol{A}$ helyett $\boldsymbol{A}^\star$-ot írunk, $\boldsymbol{v}_k$ helyett $\boldsymbol{p}_k$-t és viszont; ezután az $(\boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{A}^\star \boldsymbol{p}_k)_{\mathbf{V}^\star} = (\boldsymbol{A}^\star \boldsymbol{p}_k | \boldsymbol{v}_i)_{\mathbf{V}} = (\boldsymbol{p}_k | \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i)_{\mathbf{V}}$ formulákból adódik a kívánt egyenlőség.

21.5. Emlékezzünk, hogy $(\boldsymbol{p}_i | \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k)$ az $\boldsymbol{A}$ mátrixának az ik-adik tagja a szóban forgó bázisban. Az előző pont képlete tehát azt mondja meg, hogyan lehet az $\boldsymbol{A}$ determinánsát meghatározni az $\boldsymbol{A}$ egy tetszőleges mátrixából.

Mivel egy $N \times N$-es mátrix mint $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ lineáris leképezés önmaga mátrixa a standard bázisban, az $(\alpha_{ik} \mid i, k = 1, \ldots, N)$ mátrix determinánsa az előző pont képlete alapján

$$\sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} \mathrm{sign}\pi \prod_{k=1}^{N} \alpha_{\pi(k)k} = \sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} \mathrm{sign}\pi \prod_{k=1}^{N} \alpha_{k\pi(k)}. \qquad (*)$$

Az $\boldsymbol{A}$ mátrixa egy $\boldsymbol{K}$ koordinátázásban $\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}^{-1}$, tehát az előzőek azt mondják, hogy

$$\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}^{-1})$$

minden $\boldsymbol{K}$ koordinátázás esetén. Ezt egy kicsit általánosítani is tudjuk.

Állítás *Legyen* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ *és* $\boldsymbol{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ *lineáris bijekció. Ekkor* $\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{U})$ *és*

$$\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}).$$

Bizonyítás Könnyű a bizonyítás, ha $\mathbf{U} = \mathbf{V}$: ekkor a 21.2. állítás miatt igaz a képlet. Ha azonban $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$, másképp kell érvelnünk. Legyen $\boldsymbol{L}$ az $\mathbf{U}$ egy koordinátázása; ekkor $\boldsymbol{LT}$ a $\mathbf{V}$ koordinátázása, tehát $\det \boldsymbol{A} = \det\big((\boldsymbol{LT})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{LT})^{-1}\big) = \det(\boldsymbol{LTAT}^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}) = \det(\boldsymbol{TAT}^{-1})$.

21.6. Legyen $\mathbf{V}_i$ véges dimenziós vektortér ($i = 1, \dots, n$). A 11.5. szerint a $\bigtimes_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i \to \bigtimes_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i$ lineáris leképezések blokk-mátrixokkal azonosíthatók. Az olyan blokk-mátrix determinánsa, amelyben a főátló alatt (vagy fölött) csupa nulla áll, egyenlő a diagonálisban álló lineáris leképezések determinánsának a szorzatával, amit szemléletesen így írhatunk:

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix} = (\det \boldsymbol{A}_{11})(\det \boldsymbol{A}_{22}) \dots \det(\boldsymbol{A}_{nn}).$$

Pontosan a következőképpen fogalmazhatunk.

Állítás *Ha az* $\boldsymbol{A} : \bigtimes_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i \to \bigtimes_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i$ *lineáris leképezés* $(\boldsymbol{A}_{ik} \mid i, k = 1, \dots, n)$ *blokk-mátrixa olyan, hogy* $\boldsymbol{A}_{ik} = 0$ *ha* $i > k = 1, \dots, n$ *(illetve* $\boldsymbol{A}_{ik} = \mathbf{0}$ *ha* $i < k = 1, \dots, n$*), akkor*

$$\det \boldsymbol{A} = \prod_{k=1}^{n} \det \boldsymbol{A}_{kk}.$$

Bizonyítás Az $n = 2$ esetet tekintjük; ennek mintájára teljes indukcióval bizonyíthatunk. Legyen a két vektortér $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$, és a blokk-mátrix

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

ahol $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{U})$, $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U})$, $\mathbf{D} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$.

Vegyünk egy $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_M)$ indexezett bázist $\mathbf{U}$-ban és egy $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázist $\mathbf{V}$-ben. Ekkor $((\boldsymbol{u}_i, 0), (\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_k) \mid i = 1, \dots, M, k = 1, \dots, M)$ indexezett bázis $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$-ben. A 21.3. állítás alapján

$$\begin{aligned}
&\left(\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\right)\left(\bigwedge_{i=1}^{M}(\boldsymbol{u}_i, \mathbf{0})\right) \wedge \left(\bigwedge_{k=1}^{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_k)\right) = \\
&\quad = \left(\bigwedge_{i=1}^{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \wedge \left(\bigwedge_{k=1}^{N}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{v}_k \end{pmatrix}\right) = \\
&\quad = \left(\bigwedge_{i=1}^{M}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i, \mathbf{0})\right) \wedge \left(\bigwedge_{k=1}^{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_k)\right) = \\
&\quad = \left((\det \boldsymbol{A})\bigwedge_{i=1}^{M}(\boldsymbol{u}_i, \mathbf{0})\right) \wedge \left((\det \boldsymbol{B})\bigwedge_{k=1}^{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_k)\right) = \\
&\quad = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})\left(\bigwedge_{i=1}^{M}(\boldsymbol{u}_i, \mathbf{0})\right) \wedge \left(\bigwedge_{k=1}^{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_k)\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

Speciálisan, diagonális blokk-mátrix determinánsa is a főátlóbeli tagok determinánsának a szorzata, tehát ha $\boldsymbol{A}_i \in \operatorname{Lin}(\mathbf{V}_i)$, akkor

$$\det\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \det \boldsymbol{A}_i.$$

21.7. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy N dimenziós vektortéren értelmezett $\boldsymbol{A}$ lineáris leképezésre $\det(-\boldsymbol{A}) = (-1)^N \det \boldsymbol{A}$.

2. Tekintsük a legfeljebb $(N-1)$-ed fokú polinomok vektorterét. Mi
(i) a differenciálás,
(ii) a $p \mapsto (t \mapsto p(t+1))$ lineáris leképezés
determinánsa?

3. Mi a determinánsa a legfeljebb $(N-1)$-ed fokú polinomok vektorterén a
(i) $\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}}$
(ii) $\boldsymbol{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}}^2 \boldsymbol{D}^2$
lineáris leképezésnek?

4. Bizonyítsuk be a 21.5. $(*)$ képlet alapján, amely egy mátrix determinánsát adja meg, hogy ha $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbf{V}$ és $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbf{V}^\star$, akkor

$$\left(\bigwedge_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k\right)(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \det\big((\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}_i) \mid k, i = 1, \dots, n\big).$$

5. Igazoljuk, hogy – értelemszerű jelölésekkel –

$$\bigwedge_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ki}\boldsymbol{p}_i\right) = \det\big(\alpha_{ki} \mid k, i = 1, \dots, n\big) \bigwedge_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k.$$

6. Használjuk a 11.6. jelöléseit. Igazoljuk, hogy ha ha $\boldsymbol{A}$ injektív, akkor

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = (\det \boldsymbol{A})\det(\mathbf{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}),$$

és ha $\mathbf{D}$ injektív, akkor

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = (\det \mathbf{D})\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{C}).$$

7. Legyen, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$. Bizonyítsuk be, hogy $\det(\mathrm{id}_\mathbf{V} - \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}) = 1 - (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})$. (Útmutatás: a szóban forgó lineáris leképezés pontosan akkor izomorfizmus, ha $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) \neq 1$. Ez utóbbi esetben alkalmazzunk teljes indukciót $\mathbf{V}$ dimenziója szerint, a $\mathbf{V} = \mathbf{U} \times \mathbf{A}$ felbontással, ahol $\dim\mathbf{U} = \dim\mathbf{V} - 1$, $\dim\mathbf{A} = 1$, és használjuk fel az előző feladatot, valamint a 13.5.6. feladatot.)

22. Mátrixok determinánsa

22.1. Most közelebbről megvizsgáljuk az $N \times N$-es mátrixok determinánsát, amelyet a 21.5. $(*)$ képlete ad meg. Ez $N!$ tagú összeg. Minden tag N tényezős szorzat. Egy ilyen tag képzésének a szabálya: veszünk a mátrix minden oszlopából (sorából) egy mátrixtagot úgy, hogy ezek a választott mátrixtagok különböző sorban (oszlopban) legyenek, és az így kapott N tagot összeszorozzuk. Minden lehetséges módon elvégezve ezt az eljárást, megfelelő előjellel ellátva megkapjuk az összeg minden tagját.

Sokszor kell 2×2-es és 3×3-as mátrix determinánsát kiszámítanunk.

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21},$$

vagyis a főátlóbeli tagok szorzatából levonjuk a mellékátlóbeli tagok szorzatát.

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{32}\alpha_{21}$$
$$- \alpha_{31}\alpha_{13}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11}.$$

Pozitív előjellel kell venni a főátlóval „párhuzamosan” választott tagok szorzatát, negatív előjellel a mellékátlóval párhuzamosan választott tagok szorzatát, amint azt a következő séma mutatja: Pozitív előjel:

$$\begin{pmatrix} \bullet & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & \bullet & \\ & & \bullet \\ \bullet & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & \bullet \\ \bullet & & \\ & \bullet & \end{pmatrix},$$

Negatív előjel:

$$\begin{pmatrix} & & \bullet \\ & \bullet & \\ \bullet & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & \bullet & \\ \bullet & & \\ & & \bullet \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bullet & & \\ & & \bullet \\ & \bullet & \end{pmatrix}.$$

22.2. A 21.5. $(*)$ képletből azonnal következnek az alábbi összefüggések, amelyek jól használhatók mátrixok determinánsának kiszámítására. Ezeket a mátrixok oszlopaira fogalmazzuk meg, de ugyanúgy igazak a sorokra is, hiszen egy mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a determinánsa.

(i) Ha egy mátrix két oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.

(ii) Ha egy mátrix egy oszlopát megszorozzuk egy számmal, akkor a determináns is szorzódik azzal a számmal; például

$$\det \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ \lambda\alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NN} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NN} \end{pmatrix}.$$

(iii) Ha egy mátrix egy oszlopához hozzáadunk egy oszlopvektort, akkor a determináns két mátrix determinánsának az összege lesz: az eredetié, és azé, amelyben a szóban forgó oszlopot kicseréljünk az adott oszlopvektorral; például

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N1}+\beta_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NN} \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NN} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \beta_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ \beta_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NN} \end{pmatrix}.$$

(iv) Mivel egy mátrix oszlopai épp a standard bázisvektorok képei, a 21.2. állítás szerint egy mátrix determinánsa pontosan akkor nulla, ha oszlopai lineárisan összefüggők. Speciálisan, ha egy mátrix egy oszlopa egy másiknak a számszorosa, akkor a mátrix determinánsa nulla.

Ezt a tényt és az előző összefüggést összevetve: ha egy mátrix egy oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlopának egy számszorosát, akkor a determináns nem változik (az így nyert mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

22.3. Egy $N \times N$-es mátrix ik-adik **aldeterminánsát** úgy kapjuk meg, hogy „kiemeljük” a mátrix i-edik sorát és k-adik oszlopát, és az így maradó $(N-1) \times (N-1)$-es mátrixnak vesszük a determinánsát.

Rögzítsünk egy k_r oszlopindexet. Vegyük azokat az összeadandó tagokat a mátrix determinánsának 21.5. $(*)$ alakjában, amelyekben α_{1k_r} szerepel. $(N-1)!$ ilyen van: ahányféleképpen a mátrix minden oszlopából, a k_r-ediket kivéve, ki tudunk venni mátrixtagokat úgy, hogy mindegyik különböző sorban legyen, és ne legyen az első sorban. Ezekből az összeadandókból kiemelve α_{ik_r}-et, megkapjuk a mátrix $1k_r$-edik aldeterminánsát egy megfelelő előjellel. Teljesen hasonló gondolatmenet követhető α_{2k_r}-rel, stb. így jutunk el végül az úgynevezett **kifejtési tételhez**.

Állítás *Ha Δ_{ik} jelöli az $(\alpha_{ik} \mid i,k=1,\dots,N)$ mátrix ik-adik aldeterminánsát, akkor*

$$\det(\alpha_{ik} \mid i,k=1,\dots,N) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+k_r} \alpha_{ik_r} \Delta_{ik_r}$$

$$(k_r = 1,\dots,N).$$

Bizonyítás Az előbbi gondolatmenetet az egyszerűség kedvéért a $k_r = N$ esetre formalizáljuk:

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi\in\mathrm{Perm}_n} \mathrm{sign}\pi \prod_{k=1}^{N} \alpha_{\pi(k)k} &= \sum_{\pi\in\mathrm{Perm}_n} \mathrm{sign}\pi\,\alpha_{\pi(N)N} \prod_{k=1}^{N-1} \alpha_{\pi(k)k} = \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_{iN} \sum_{\pi,\pi(N)=i} \mathrm{sign}\pi \prod_{k=1}^{N-1} \alpha_{\pi(k)k} = \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_{iN} (-1)^{i+N} \sum_{\sigma\in\mathrm{Perm}_{N-1}} \mathrm{sign}\sigma \prod_{k=1}^{N-1} \alpha_{\sigma(k)k} = \\
&= \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+N} \alpha_{iN} \Delta_{iN}.
\end{aligned}$$

Érdemes szavakban is összefoglani a kifejtési tételt: a mátrix determinánsát úgy is kiszámíthatjuk, hogy egy tetszőlegesen választott oszlop tagjait rendre megszorozzuk a hozzájuk tartozó aldeterminánssal, megfelelő előjellel látjuk el, és az így kapott mennyiségeket összeadjuk. A megfelelő előjel meghatározására a következő sémát rajzoljuk fel:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}.$$

Ha tehát páratlan indexű oszlop szerint fejtjük ki a determinánst, akkor pozitív előjellel kell kezdeni, ha páros szerint, akkor negatív előjellel, aztán váltogatni az előjeleket.

Megjegyezzük, hogy olyan oszlop szerint érdemes alkalmazni a kifejtést, amelyben sok a nulla.

Végül újra megemlítjük, minden igaz marad, ha oszlop helyett sorra mondjuk el ezeket.

22.4. Az előző formulák arra is lehetőséget nyújtanak, hogy egy mátrix inverzét meghatározzuk. Emlékeztetünk, hogy egy mátrix mint lineáris leképezés pontosan akkor bijekció, ha a determinánsa nem nulla.

Állítás *Ha az* $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ik} \mid i, k = 1, \dots, N)$ *mátrix dermeninánsa nem nulla, akkor*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \left((-1)^{i+k}\Delta_{ik} \mid k, i = 1, \dots, N\right).$$

Bizonyítás Legyen $\hat{\alpha}_{ki} := \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}(-1)^{i+k}\Delta_{ik}$. Ekkor a kifejtési tétel szerint minden k-ra $\sum_{i=1}^{N} \hat{\alpha}_{ki}\alpha_{ik} = 1$; viszont ha $j \neq k$, akkor $\sum_{i=1}^{N} \hat{\alpha}_{ij}\alpha_{ik} = 0$, mert $\sum_{i=1}^{N}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\alpha_{ik}$ annak a mátrixnak a determinánsa, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti mátrix k-adik oszlopa helyébe beírjuk a j-edik oszlopát.

22.5. Az előzőekben szereplő aldeterminásokat úgy is megfogalmazhatjuk, hogy kiválasztjuk az $N \times N$-es mátrix $N-1$ oszlopát és $N-1$ sorát, vesszük azokat a tagokat, amelyek benne vannak a választott oszlopokban és sorokban is, és képezzük az így előállított $(N-1) \times (N-1)$-es mátrix determinánsát.

Ennek mintájára egy $M \times N$-es mátrix r-**ed rendű aldeterminánsát** úgy kapjuk, hogy kiválasztjuk a mátrix r oszlopát és r sorát, vesszük azokat a tagokat, amelyek benne vannak a választott oszlopokban és sorokban is, és képezzük az így előállított $r \times r$-es mátrix determinánsát.

Vegyük a mátrix r darab oszlopát, jelölje azokat $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{K}^M$. Legyen továbbá $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_M$ a $\mathbb{K}^M = (\mathbb{K}^M)^\star$ standard bázisa.

Ha $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r$ lineárisan összefüggők, akkor 20.7. szerint $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$, ezért akárhogyan is választunk r-et a standard bázisvektorok közül,

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_i\right)(\boldsymbol{e}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{k_r}) = 0,$$

ami a 21.7.4. feladat szerint azt jelenti, hogy az adott r oszlopból akárhogyan kiválasztott r-ed rendű aldetermináns nulla.

Ha $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r$ lineárisan függetlenek, akkor $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_r \neq \boldsymbol{0}$; minthogy egy multilineáris leképezést egyértelműen meghatároznak a bázisvektorokon felvett értékei, van olyan $\boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_r}$, hogy

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_i\right)(\boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_r}) \neq 0,$$

ami ugyancsak a 21.7.4. feladat szerint azt jelenti, hogy az adott r oszlopból kiválasztható nem nulla r-ed rendű aldetermináns.

Egy lineáris leképezés rangja, definíció szerint, a képterének a dimenziója. Egy mátrix oszlopai a standard bázisvektorok képei a mátrix mint lineáris leképezés által. Következésképp egy mátrix rangja megegyezik a maximális lineárisan független oszlopainak a számával. Az előző gondolatmenet alapján igaz tehát a következő megállapítás.

Állítás *Egy mátrix rangja egyenlő a maximális nem nulla aldeterminánsának a rendjével.*

22.6. A lineáris egyenletek megoldhatóságára vonatkozó kijelentéseket egyszerűen fogalmazhatjuk meg a determináns fogalmával.

Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}$. Ekkor az

$$(x \in \mathbf{V})? \qquad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{a}$$

egyenletet **lineárisnak** nevezzük. Az egyenlet **homogén**, ha $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, és **inhomogén**, ha $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$.

A homogén egyenletnek mindig van megoldása: az $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; ezt **triviálisnak** szokás hívni. A triviálistól különböző megoldása pontosan akkor létezik, ha $\boldsymbol{A}$ nem injektív, azaz $\det \boldsymbol{A} = 0$.

Az inhomogén egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$. A megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\boldsymbol{A}$ injektív, azaz $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Most átfogalmazzuk a $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$ feltételt a gyakorlati alkalmazások szempontjából hasznos alakba. Definiáljuk az $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}) : \mathbf{V} \times \mathbb{K} \to \mathbf{U}$, $(\boldsymbol{x}, \alpha) \mapsto \boldsymbol{Ax} + \alpha\boldsymbol{a}$ lineáris leképezést. $\boldsymbol{a}$ pontosan akkor van benne az $\boldsymbol{A}$ értékkészletében, ha $\mathrm{Ran}\boldsymbol{A} = \mathrm{Ran}\boldsymbol{A} + \mathbb{K}\boldsymbol{a}$, azaz $\mathrm{Ran}\boldsymbol{A} = \mathrm{Ran}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a})$. Ez azt jelenti, hogy az inhomogén egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha $\boldsymbol{A}$ és $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a})$ rangja ugyanaz.

$\mathbf{V} = \mathbb{K}^N$ esetén $\boldsymbol{A}$ $N \times N$-es mátrix, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a})$ pedig az az $N \times (N+1)$-es mátrix, amelyet úgy kapunk, hogy az $\boldsymbol{A}$ mátrixot „kibővítjük” a $\boldsymbol{a}$ oszlopvektorral: az $\boldsymbol{A}$ mátrixhoz $(N+1)$-edik oszlopnak odatesszük $\boldsymbol{a}$-t.

22.7. Vegyük észre, hogy csak $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés determinánsát értelmeztük, különböző vektorterek közötti lineáris leképezését nem. Értelmezhetnénk ugyan az $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ determinánsát is, ahol $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ azonos N dimenziós vektorterek, de 21.1. képletei szerint akkor $\det \boldsymbol{A} : \overset{N}{\wedge}\, \mathbf{W}^\star \to \overset{N}{\wedge}\, \mathbf{V}^\star$ lineáris leképezés volna, amely nem azonosítható egy számmal.

Ez azért fontos, mert a $\mathbf{V}$ és a $\mathbf{W}$ koordinátázásával $\boldsymbol{A}$ is mátrixszal reprezentálható, a mátrixnak pedig van determinánsa. Ez azonban nem az $\boldsymbol{A}$ determinánsa. Míg egy $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ determinánsa egyenlő *bármely koordinátázásbeli* mátrixának determinánsával, $\mathbf{W} \neq \mathbf{V}$ esetén a koordinátázással kapott mátrixok determinánsa függ a koordinátázástól.

Különösen fontosak ebből a szempontból azok a lineáris leképezések, amelyek egy vektortér és duálisa között hatnak. A 16.7. fogalmaival azt mondhatjuk, csak olyan lineáris leképezések determinánsa értelmes és számíthatjuk tetszőleges mátrixából, amelyeknek a két indexe ellentétes helyzetben van.

Tehát az $\boldsymbol{R} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ lineáris leképezés egy mátrixának a determinánsa nem az $\boldsymbol{R}$ determinánsa. Ennek ellenére az ilyen determinánsok használhatók az $\boldsymbol{R}$ definitási tulajdonságainak a jellemzésére.

A $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\star) \equiv \mathrm{Lin}^2(\mathbf{V} \times \mathbf{V}, \mathbb{K})$ azonosítás szerint az $\boldsymbol{R} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ lineáris leképezés szimmetrikus, ha $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{R}\boldsymbol{x})$ minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén, és valós vektortér esetén pozitív (negatív) definit, ha minden nem nulla $\boldsymbol{x}$ vektorra $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}) > 0$ (< 0) teljesül.

Szimmetrikus lineáris leképezés bármely koordinátázás szerinti mátrixa szimmetrikus, ezért a definitási tulajdonságot valós szimmetrikus mátrixokra vizsgáljuk.

22.8. Egy $N \times N$-es mátrix k-adik **sarokaldeterminánsának** nevezzük azt a k-ad rendű aldeterminánst, amelyet a mátrix első k oszlopából és k sorából képezünk.

Hogy képet kapjunk, miről is lesz szó, tekintsünk először egy valós diagonális mátrixot. Könnyű látni, hogy az

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_N \end{pmatrix}$$

diagonális mátrix k-adik aldterminása $\prod_{i=1}^{k} \alpha_i =: S_k$, és a mátrix pontosan akkor

– pozitív definit, ha $\alpha_k > 0$ minden k-ra, ami egyenértékű azzal, hogy $S_k > 0$ minden k-ra,

– negatív definit, ha $\alpha_k < 0$ minden k-ra, ami egyenértékű azzal, hogy $(-1)^k S_k > 0$ minden k-ra.

Állítás *Jelölje S_k egy valós $N \times N$-es szimmetrikus mátrix k-adik sarokaldeterminánsát. A mátrix pontosan akkor*

– pozitív definit, ha $S_k > 0$,

– negatív definit, ha $(-1)^k S_k > 0$

minden $k = 1, \dots, N$ esetén.

Bizonyítás Mivel pozitív definit mátrix (-1)-szerese negatív definit, elég a pozitív definit esettel foglalkozni.

A bizonyítást N szerinti teljes indukcióval végezzük. $N = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz az állítás. Tegyük fel, hogy igaz $(N-1)$-re is.

$N \times N$-es szimmetrikus mátrixot

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^\star & \delta \end{pmatrix} \tag{1}$$

alakba írhatunk, ahol $\boldsymbol{A}$ $(N-1) \times (N-1)$-es mátrix $b \in \mathbb{R}^{(N-1)}$, amelyet oszlopvektornak fogunk fel, és $\boldsymbol{b}^\star$ a megfelelő sorvektor; végül $\delta \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy az (1) blokk-mátrix pozitív definit. Ekkor $\boldsymbol{A}$ szimmetrikus és pozitív definit, hiszen egy szimmetrikus és pozítív definit leszűkítése. Ezért az indukciós feltevésünk szerint az $\boldsymbol{A}$ minden sarokaldeterminánsa pozitív. Azt kell csak megmutatnunk, hogy az $N \times N$-es mátrix determinánsa pozitív.

Egyszerű tény, hogy pozitív definit mátrix mint lineáris leképezés magja nulla, ezért $\boldsymbol{A}$ bijekció, és a 21.7.5. feladat szerint

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^\star & \delta \end{pmatrix} = (\det \boldsymbol{A})(\delta - (\boldsymbol{b}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})). \tag{2}$$

Továbbá minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{(N-1)}$ és $\xi \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^\star & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^\star & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \xi \end{pmatrix} = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{x})\xi + \delta\xi^2. \tag{3}$$

A blokk-mátrix pozitív definit, ezért ha $\xi\boldsymbol{x} \neq 0$, akkor a fenti bal oldal nagyobb, mint nulla. A $\xi := 1$, $\boldsymbol{x} := -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ esetben ez az egyenlőtlenség azt adja, hogy $\delta - (\boldsymbol{b}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}) > 0$, így (2) alapján az $N \times N$-es mátrix determinánsa is pozitív.

Tegyük most fel, hogy az (1) blokk-mátrix minden sarokaldeterminánsa pozitív. Ekkor $\det \boldsymbol{A} > 0$, speciálisan $\boldsymbol{A}$ bijekció, így most is igaz a (2) összefügés, amiből most

$$\delta - (\boldsymbol{b}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}) > 0 \tag{4}$$

következik.

Az indukciós feltevésünk szerint $\boldsymbol{A}$ pozitív definint, tehát minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$ és $\xi \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 < (\boldsymbol{x} + \xi\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \xi\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{x})\xi + (\boldsymbol{b}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})\xi^2,$$

és így (4) miatt az is igaz, hogy (3) pozitív, vagyis az $N \times N$-es mátrix pozitív definit. ■

Hangsúlyozzuk, hogy egy szimmetrikus $\boldsymbol{R} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ lineáris leképezés különböző koordinátázásokban vett mátrixának a determinánsa és a sarokaldeterminánsai is általában különbözők, de az igaz hogy

– ha $\boldsymbol{R}$ pozitív definit, akkor minden koordinátázásban a mátrixának a sarokaldeterminánsai pozitívok,

– ha $\boldsymbol{R}$ egy koordinátázásban vett mátrixának a sarokaldeterminánsai pozitívok, akkor $\boldsymbol{R}$ pozitív definit.

22.9. Feladatok

1. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Használjuk több ízben is a 22.2.(iii)-ben leírt módszert majd a kifejtési tételt a következű mátrixok determinánsának a meghatározására:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Mennyi a rangja az alábbi mátrixoknak?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & -1 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \\ -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Egy diagonális mátrixra nyilván igaz, hogy ha pozitív szemidefinit, akkor sarokaldeterminánsai pozitívak és nullák, és van nulla sarokaldeterminánsa. Találjunk egyszerű példát olyan 2×2-es nem diagonális mátrixra, amely indefinit, és az egyik sarokaldeterminánsa nulla, a másik pozitív.

5. Miért nem igaz a 22.8. állítás szimmetrikus komplex mátrixokra?

6. Egy $(\alpha_{ik} \mid i, k = 1, \ldots, N)$ komplex mátrix hermitikus, ha $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}^*$ (lásd 18.8.). Bizonyítsuk be hogy egy ilyen hermitikus mátrix – vagyis a megfelelő hermitikus forma – pontosan akkor pozitív definit, ha minden sarokaldeterminánsa pozitív.

7. Keressük meg a

$$(\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^4)? \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ 51 \end{pmatrix}$$

lineáris egyenlet megoldásait.

23. Irányítás

23.1. A fizikában gyakran előforduló fogalom, hogy három vektor a fizikai térben ,,jobb sodrású" rendszert alkot, vagyis sorban egymás után úgy következnek, mint a jobb kezünk hüvelykujja, mutatóujja és középső ujja. Ennek a szemléletes fogalomnak adunk most pontos matematikai értelmet.

Definíció *A* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós valós vektortér* $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ *és* $(\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_N)$ *indexezett bázisa* ***azonos irányítású****, ha a* $\boldsymbol{v}_i \mapsto \boldsymbol{v}'_i$ $(i = 1, \dots, N)$ *hozzáérendeléssel értelmezett* $\boldsymbol{Z} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineáris bijekció determinánsa pozitív.*

Megjegyezzük, hogy a 16.9.1. feladat alapján a szóban forgó lineáris leképezés determinánsa megegyezik a ,,vesszőtlen" bázisról a ,,vesszős" bázisra való áttérés mátrixának a determinánsával.

Állítás *A* $\mathbf{V}$ *indexezett bázisainak a halmazán az azonos irányítottság ekvivalencia-reláció, amely szerint két ekvivalencia-osztály van.*

Bizonyítás A reláció nyilvánvalóan reflexív: ha a két bázis ugyanaz, akkor $\boldsymbol{Z}$ az identitás, amelynek a determinánsa 1. A reláció szimmetrikus: az $\boldsymbol{v}'_i \mapsto \boldsymbol{v}_i$ formulával meghatározott lineáris leképezés $\boldsymbol{Z}$-nek az inverze, amelynek a determinánsa $1/\det \boldsymbol{Z}$. A reláció tranzitív: két lineáris leképezés szorzatának determinánsa a determinánsok szorzata.

Valós vektortérről lévén szó, egy lineáris bijekció determinánsa vagy pozitív vagy negatív. Vegyünk két irányított bázist, amelyek elemei azonosak, de az egyikben két vektor sorrendje fel van cserélve a másikéhoz képest. A két bázis közötti áttérési determináns negatív, tehát a két bázis különböző ekvivalencia-osztályban van. Akármilyen más bázis viszont vagy az egyikkel vagy a másikkal azonos irányítású, tehát két ekvivalencia-osztály van.

23.2. Definíció *A* $(\mathbf{V}, o)$ *párt* ***irányított vektortérnek*** *hívjuk, ha* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós valós vektortér és* o *(a vektortér* ***irányítása****) azonos irányítású indexezett bázisainak egy ekvivalencia-osztálya.* ***Pozitív irányításúnak*** *mondjuk a vektortér egy indexezett bázisát, ha benne van* o*-ban; ellenkező esetben* ***negatív irányítású****.*

Ugyanúgy, ahogy a vektorterek jelöléséből el szoktuk hagyni a műveleteket, az irányított vektorterek jelöléséből is elhagyjuk az irányítást; azt mondjuk, legyen $\mathbf{V}$ irányított vektortér, és ebbe beleértjük, hogy ki van jelölve a pozitívan irányított indexezett bázisainak a halmaza.

Megjegyezzük, egy irányítás megadásához elég megadni egyetlen indexezett bázist, mert az egyértelműen meghatározza a vele azonos irányítású indexezett bázisok összességét.

$\mathbb{R}^N$ **standard irányítását** a standard indexezett bázis határozza meg.

Azonos irányítású indexezett bázisok duálisai is azonos irányításúak, hiszen a duális bázisok közötti áttérési mátrix az eredeti áttérési mátrix transzponáltjának az inverze. Ezért $\mathbf{V}$ irányítása meghatározza $\mathbf{V}^\star$ egy irányítását: azt, amelyet a $\mathbf{V}$ valamely – tehát minden – pozitívan irányított bázisának a duálisa jelöl ki.

23.3. Állítás *Legyen* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{U}$ *azonos véges dimenziójú valós vektortér,* $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ *lineáris bijekció. Ha* $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ *és* $(\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_N)$ *a* $\mathbf{V}$*-nek azonosan irányított indexezett bázisai, akkor* $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_N)$ *és* $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}'_N)$ *az* $\mathbf{U}$*-nak azonosan irányított bázisai.*

Bizonyítás Legyen $\boldsymbol{Z}$ mint az előbb. Nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}^{-1} : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ az a lineáris bijekció, amely $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i$-t $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}'_i$-ba viszi. 21.5. szerint $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{Z} > 0$. ■

Lineáris bijekció tehát a indexezett bázisok egy ekvivalencia-osztályát egy ekvivalencia-osztályra képezi, ezért értelmes a követekező meghatározás.

Definíció *Irányított vektorterek közötti lineáris bijekciót* ***irányítástartónak*** *hívunk, ha pozitív irányítású bázist pozitív irányításúba visz át.*

23.4. Legyen $\mathbf{A}$ egy dimenziós valós vektortér. Ennek minden nem nulla eleme bázis. Két nem nulla elem akkor azonos irányítású, ha egymás pozitív számszorosai. Szemléletesen az azonos irányítású bázisok egy-egy félegyenest alkotnak; a nem nulla $\boldsymbol{a}$ elem ekvivalencia osztálya $\mathbb{R}^+\boldsymbol{a} = \{\alpha\boldsymbol{a} \mid \alpha \in \mathbb{R}^+\}$.

Az egy dimenziós $\mathbf{A}$ egy irányítása tehát egy félegyenesének a kiválasztását jelenti. A kijelölt félegyenesben levő elemeket **pozitívnak** mondjuk, és így jelöljük: $\mathbf{0} < \boldsymbol{a}$. Értelemszerű ezután, mit jelent $\mathbf{0} \le \boldsymbol{a}$. Bevezetjük az

$$\mathbf{A}^+ := \{\boldsymbol{a} \in \mathbf{A} \mid \mathbf{0} < \boldsymbol{a}\}, \qquad \mathbf{A}_0^+ := \{\boldsymbol{a} \in \mathbf{A} \mid \mathbf{0} \le \boldsymbol{a}\}$$

jelöléseket.

Értelmezzük az $\mathbf{A}$-beli $\boldsymbol{a}$ elem **előjelét**:

$$\operatorname{sign}\boldsymbol{a} := \begin{cases} +1 & \text{ha} \quad \boldsymbol{a} \in \mathbf{A}_0^+, \\ 0 & \text{ha} \quad \boldsymbol{a} = \mathbf{0}, \\ -1 & \text{ha} \quad \boldsymbol{a} \notin \mathbf{A}_0^+, \end{cases}$$

valamint **abszolútértékét**:

$$|\boldsymbol{a}| := (\operatorname{sign}\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}.$$

Az irányítás meghatároz $\mathbf{A}$-n egy láncszerű rendezést:

$$\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b} \quad \text{jelentse azt, hogy} \quad \mathbf{0} \le \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}.$$

Könnyű látni, hogy $\leq$ reflexív és antiszimmetrikus; a tranzitivitást az alábbi (ii) tulajdonságból származtathatjuk.

Mivel pozitív elemek összege és pozitív számszorosa is pozitív, igen egyszerű ellenőrizni, hogy igazak a következő összefüggések minden $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbf{A}$ esetén:

(i) ha $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{d}$, akkor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$,

(ii) ha $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, akkor $\alpha\boldsymbol{a} \leq \alpha\boldsymbol{b}$.

Fordítva is igaz: ha megadunk $\mathbf{A}$-n egy $\leq$ láncszerű rendezést, amely teljesíti az (i) és (ii) követelményeket, akkor az erre a rendezésre nézve pozitív elemek összessége egy félegyenest alkot, vagyis meghatároz egy irányítást.

Összefoglava tehát: egy dimenziós valós vektortéren az irányítások és a láncszerű rendezések, amelyek eleget tesznek az (i) és (ii) összefüggéseknek, kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak.

Az irányított egy dimenziós vektorterek fontos szerepet kapnak a fizikában, ugyanis egy fizikai mennyiség – például tömeg, hosszúság, időtartam, sebességnagyság – értékeinek összeségét egy ilyen pozitív elemeivel tudjuk jól modellezni. Ezért vezetjük be a következő elnevezést:

Definíció **Mértékegyenesnek** *hívunk egy irányított egy dimenziós valós vektorteret.*

23.5. Feladatok

1. Azonos irányítású-e $\mathbb{R}^3$-ban az $\big((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\big)$ indexezett bázis a standard bázissal?

2. Legyen $\mathbf{V}$ irányított vektortér. Igazoljuk, hogy az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris bijekció pontosan akkor irányítástartó, ha $\det \boldsymbol{A} > 0$.

3. Legyen $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ és $(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_N)$ a $\mathbf{V}$ valós vektortér indexezett bázisa, $(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ illetve $(\boldsymbol{p}'_1, \ldots, \boldsymbol{p}'_N)$ ezek duálisa. Mutassuk meg, hogy ez a két bázis pontosan akkor azonos irányítású, ha $\bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}_k$ és $\bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}'_k$ egymás pozitív számszorosai, ami egyenértékű azzal, hogy $\bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{p}_k$ és $\bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{p}'_k$ egymás pozitív számszorosai.

Igazoljuk ennek alapján, hogy $\mathbf{V}$ és $\overset{N}{\wedge}\mathbf{V}$, valamint $\mathbf{V}$ és $\overset{N}{\wedge}\mathbf{V}^\star$ irányításai kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

V. TENZOROK

Először a tenzoroknak talán különösnek tűnő absztrakt definíciójával kezdjük, s aztán a tenzorszorzatok tulajdonságainak vizsgálatán át eljutunk a fizikában használt tenzorfogalomhoz; az alapvető tenzorok nem mások, mint lineáris leképezések vagy bilineáris formák.

24. Tenzorszorzatok

24.1. A legegyszerűbb bilineáris leképezés a számok szorzása. Ez rendelkezik azzal a jó tulajdonsággal, hogy két szám szorzata akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik szám nulla. Általában egy $\boldsymbol{R} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ bilineáris leképezésre ez nem igaz: lehetséges, hogy $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$, noha sem $\boldsymbol{x}$ sem $\boldsymbol{y}$ nem nulla. Szemléletesen úgy fogalmazhatunk, hogy a számok szorzása mint bilineáris leképezés csak akkor veszi fel a nulla értéket, ha "muszáj". A vektorok tenzorszorzása is olyan bilineáris leképezés, amely "a lehető legkevesebb helyen" veszi fel a nulla értéket.

Definíció *Legyen* $\mathbf{U}$ *és* $\mathbf{V}$ *(azonos test fölötti) vektortér. Az* $\mathbf{U}$*-nak* $\mathbf{V}$*-vel vett* ***tenzorszorzata*** *egy* $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{r})$ *pár, ahol*

(i) $\mathbf{Z}$ *vektortér,*

(ii) $\boldsymbol{r} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{Z}$ *bilineáris leképezés,*

amelyekre az teljesül, hogy ha $\mathbf{W}$ *vektortér és* $\boldsymbol{R} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *bilineáris leképezés, akkor létezik egyetlen olyan* $\boldsymbol{L} : \mathbf{Z} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképezés, hogy*

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{r}.$$

A $\boldsymbol{r}$ bilineáris leképezés (tenzorszorzás) az $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$-n értelmezett bilineáris leképezések között a "legkevesebb helyen" veszi fel a nulla értéket: ahol $\boldsymbol{r}$ értéke nulla, ott minden más bilineáris leképezésé is.

24.2. Állítás *Z vektortér és $\boldsymbol{r} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{Z}$ bilineáris leképezés esetén a $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{r})$ pár akkor és csak akkor $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ tenzorszorzata, ha*

(i) $\mathbf{Z} = \mathrm{Span}(\mathrm{Ran}\boldsymbol{r})$,

(ii) ha $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ a $\mathbf{V}$ lineárisan független elemei, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbf{U}$ és $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k) = \mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{u}_1 = \cdots = \boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$.

Bizonyítás Zárjuk ki az $\mathbf{U} = \{\mathbf{0}\}$ vagy $\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$ triviális esetet. Tegyük fel, hogy (i) teljesül. Ekkor $\mathbf{Z}$ minden eleme $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k)$ alakú (lásd 17.4.).

Tegyük fel, hogy (ii) is teljesül, és $\boldsymbol{R} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ bilineáris leképezés. Ekkor az

$$\boldsymbol{L} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k) := \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k)$$

képlettel jól definiált $\boldsymbol{L} : \mathbf{Z} \to \mathbf{W}$ leképezés lineáris és az egyetlen olyan, hogy $\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}$. Egyszerű számolással ellenőrizhető $\boldsymbol{L}$ linearitása; egyértelműsége abból következik, hogy lineáris leképezést egyértelműen meghatározzák egy generáló halmazon – jelen esetben $\mathrm{Ran}\boldsymbol{r}$-en – felvett értékei. Csak az nem nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{L}$ jól definiált. Ennek igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy ha $\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}'_i, \boldsymbol{v}'_i)$, akkor $\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}'_i, \boldsymbol{v}'_i)$. Egy oldalra rendezéssel és átszámozással ezt visszavezethetjük arra, hogy a $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}'_i, \boldsymbol{v}'_i) = \mathbf{0}$ egyenlőségből $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}'_i, \boldsymbol{v}'_i) = \mathbf{0}$ kell, hogy következzen. Tudjuk, vannak olyan $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ és lineárisan független $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ elemek, hogy $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}'_i, \boldsymbol{v}'_i) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k)$ és $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}'_i, \boldsymbol{v}'_i) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k)$ (lásd a 17.4. állítást, amelynek a bizonyításából látszik, hogy mind $\boldsymbol{r}$-re, mind $\boldsymbol{R}$-re ugyanazokkal az elemekkel igaz az egyenlőség, hiszen csak a bilinearitást használtuk ki). Ezért az (ii) feltételből adódik a kívánt összefüggés.

Tegyük most fel, hogy (i) nem teljesül, vagyis a $\boldsymbol{r}$ értékkészlete által kifeszitett lineáris altér nem az egész $\mathbf{Z}$. Nyilvánvaló, hogy ekkor, ha létezik is $\boldsymbol{L}$ minden $\boldsymbol{R}$-hez úgy, hogy $\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}$, az nem egyértelmű: $\mathrm{Span}(\mathrm{Ran}\boldsymbol{r})$ egy kiegészítő alterén lineárisan akárhogyan lehet definiálva.

Ha viszont (ii) nem teljesül, akkor van olyan $\boldsymbol{R}$, amelyhez nem létezik $\boldsymbol{L}$ lineáris leképezés úgy, hogy $\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}$. Íme: legyen $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ lineárisan független, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ egyik sem nulla és $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k) = \mathbf{0}$. Legyen m az $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ vektorok közül kiválasztható legtöbb lineárisan független vektor száma; $0 \neq m \leq n$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy éppen az első m vektor ilyen. Egészítsük ki az $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ halmazt bázissá $\mathbf{V}$-ben, és az $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ halmazt bázissá $\mathbf{U}$-ban. Definiáljuk az $\boldsymbol{R} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezést úgy, hogy $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_k) := \delta_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, m)$, és $\boldsymbol{R}$ minden más báziselem-páron vegyen fel nulla értéket. Ekkor $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k) = m$, és ha van is olyan $\boldsymbol{L}$ leképezés, amellyel $\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}$, akkor $\boldsymbol{L}(\mathbf{0}) = m \neq 0$, tehát $\boldsymbol{L}$ nem lehet lineáris. ■

Vegyük észre, hogy az állításban szereplő (ii) feltétel a lényeges: ha $\boldsymbol{r}$ ilyen tulajdonságú bilineáris leképezés, azaz **tenzorszorzás**, akkor $(\mathrm{Span}(\mathrm{Ran}\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r})$ tenzorszorzat.

24.3. Legyen $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{r})$ az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ tenzorszorzata. Ekkor az $\boldsymbol{R}$ szerepére vehetjük $\boldsymbol{r}$-t is; mivel $\mathrm{id}_{\mathbf{Z}} \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$, a tenzorszorzat definíciója értelmében ez az egyetlen ilyen lehetőség, más szóval, ha $\boldsymbol{A}\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ olyan lineáris leképezés, hogy $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$, akkor $\boldsymbol{A} = \mathrm{id}_{\mathbf{Z}}$.

Ha $(\mathbf{Z}', \boldsymbol{r}')$ az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ egy másik tenzorszorzata, akkor egyértelműen léteznek $\boldsymbol{L} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}'$ és $\boldsymbol{L}' : \mathbf{Z}' \to \mathbf{Z}$ lineáris leképezések, amelyekkel

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{L}' \circ \boldsymbol{r}',$$

amiből

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{L}' \circ \boldsymbol{L}) \circ \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}' = (\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{L}') \circ \boldsymbol{r}',$$

és az előbbi észrevételünk szerint

$$\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{L}' = \mathrm{id}_{\mathbf{Z}}, \qquad \boldsymbol{L}' \circ \boldsymbol{L} = \mathrm{id}_{\mathbf{Z}'},$$

tehát $\boldsymbol{L}$ és $\boldsymbol{L}'$ lineáris bijekciók, és $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L}^{-1}$.

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ két tenzorszorzatának vektorterei izomorfak és egyetlen olyan izomorfizmus van, amely átviszi egymásba a tenzorszorzásokat. Azt mondjuk, a tenzorszorzat lényegében egyértelmű, és ezért “a” tenzorszorzatról szoktunk beszélni. Továbbá szokásosan magát a megfelelő vektorteret (ami a definícióban $\mathbf{Z}$ volt) nevezzük tenzorszorzatnak és $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$-vel jelöljük; a tenzorszorzást (ami a definícióban $\boldsymbol{r}$ volt) pedig a $\otimes$ szorzásjellel írjuk:

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}.$$

A tenzorszorzat definíciójának alaptulajdonsága, amelyre úgy fogunk hivatkozni, hogy bármely $\boldsymbol{R}$ bilineáris leképezés **egyértelműen faktorizálható a tenzorszorzaton** keresztül egy $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{R}}$ lineáris leképezéssel, ezzel ilyen formát ölt:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) \qquad (\boldsymbol{u} \in \mathbf{U}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}). \tag{$*$}$$

Érdemes továbbá felidézni, hogy a 17.4. állítás értelmében $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$ minden eleme $\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{u}_k\otimes\boldsymbol{v}_k$ alakú, ahol $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ a $\mathbf{V}$-nek ineárisan független elemei (és ha a tenzorszorzat eleme nem nulla, akkor $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n$ is vehető lineárisan függetlennek).

Szemléletesen tehát $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$ a $\mathbf{V}$ elemeinek az $\mathbf{U}$-ból vett "vektoregyütthatókkal képezett lineáris kombinációiból" áll. Mi több, még az a szokásos tulajdonság is igaz, hogy ha $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ a $\mathbf{V}$-nek lineárisan független elemei és $\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{u}_k\otimes\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{u}_1=\dots,\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$.

Másképp ugyanez: ha $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ a $\mathbf{V}$-nek lineárisan független elemei és $\boldsymbol{u}_1\neq\mathbf{0},\dots,\boldsymbol{u}_n\neq\mathbf{0}$, akkor $\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{u}_k\otimes\boldsymbol{v}_k\neq\mathbf{0}$. Speciálisan, ha $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$: a tenzorszorzás rendelkezik a számok szorzásának a tulajdonságával: nem nulla elemek szorzata nem nulla. Ennél azonban jóval erősebb a fent leírt tulajdonság.

24.4. Eddig még nem tudjuk, létezik-e tenzorszorzat. Most megmutatjuk, hogy igen.

Legyen $\boldsymbol{u}\in\mathbf{U}$, $\boldsymbol{v}\in\mathbf{V}$, és értelmezzük az

$$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}:\mathbf{V}^\star\to\mathbf{U},\quad \boldsymbol{p}\mapsto(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$$

lineáris leképezést. Ez összhangban van már korábban használt jelölésünkkel (lásd 13.1.), és megmutatjuk, hogy összhangban áll az előző pont megállapodásával.

Állítás *Az $\mathbf{U}\times\mathbf{V}\to\mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star,\mathbf{U})$, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ leképezés tenzorszorzás, azaz olyan bilineáris leképezés, amely teljesíti a 24.2. állítás (ii) feltételét.*

Bizonyítás Az nyilvánvaló, hogy $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ bilineáris. Legyen $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\in\mathbf{V}$ lineárisan független, és $\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{u}_k\otimes\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0}$. Ekkor minden $\boldsymbol{p}\in\mathbf{V}^\star$ és $\boldsymbol{f}\in\mathbf{U}^\star$ esetén

$$0=\left(\boldsymbol{f}\,\middle|\,\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{u}_k\otimes\boldsymbol{v}_k\right)\boldsymbol{p}\right)=\left(\boldsymbol{f}\,\middle|\,\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v}_k)\boldsymbol{u}_k\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v}_k)(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{u}_k)=\left(\boldsymbol{p}\,\middle|\,\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{v}_k\right).$$

Mivel ez minden $\boldsymbol{p}$-re igaz és $\mathbf{V}^\star$ szétválasztja $\mathbf{V}$ elemeit, $\mathbf{0}=\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{v}_k$. A lineáris függetlenség miatt $(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{u}_k)=0$ minden k-ra; mivel ez minden $\boldsymbol{f}$-re fennáll, ismét a szétválasztás miatt végül is azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{u}_1=\dots=\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$. ■

Következésképpen $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$ a $\mathbf{V}^\star\to\mathbf{U}$ lineáris leképezések vektorterében az ilyen szorzat alakú (egy rangú) lineáris leképezések kifeszítette altér, azaz

$$\mathbf{U}\otimes\mathbf{V} \Rrightarrow \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star,\mathbf{U}) \Rrightarrow \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}^\star\times\mathbf{V}^\star,\mathbb{K}). \tag{$*$}$$

Itt a második azonosításnál a 17.7. eredményét vettük figyelembe; azért írtuk ki, mert szokszor célszerű $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$-t bilineáris leképezésnek tekinteni:

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) := (\boldsymbol{q}|\boldsymbol{u})(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v}) \qquad (\boldsymbol{q}\in\mathbf{U}^\star, \boldsymbol{p}\in\mathbf{V}^\star).$$

Megjegyezzük, hogy itt és a tenzorszorzatokkal kapcsolatban később is, $\Rrightarrow$ és $\equiv$ egy kicsit más jelentésű, mint korábban; ugyanis $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$ eleve csak egy egyértelmű izomorfizmus erejéig van meghatározva.

24.5. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy egyes konkrét vektorterek esetén a tenzorszorzatot célszerű másképp realizálni, nem lineáris vagy bilineáris leképezésekkel. Az egyik legfontosabb példa a lineáris leképezések vektortereinek tenzorszorzata, amelyről a 27. fejezetben szólunk, a másik fontos példát pedig most ismertetjük.

Legyen $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ vektortér, S és T nem üres halmaz. Megmutatjuk, hogy

$$\mathbf{U}^S\otimes\mathbf{V}^T \Rrightarrow (\mathbf{U}\otimes\mathbf{V})^{S\times T}, \quad \boldsymbol{\psi}\otimes\boldsymbol{\phi} \equiv ((s,t)\mapsto \boldsymbol{\psi}(s)\otimes\boldsymbol{\phi}(t)).$$

Ügyeljünk arra, hogy itt a $\otimes$ jel két értelemben is megjelenik: $\mathbf{U}^S$ és $\mathbf{V}^T$ tenzorszorzatának a jelölésére is, $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ tenzorszorzatának a jelölésére is. Az $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$ tenzorszorzatot a szokásos bilineáris formákkal realizáljuk. Világos, hogy a fenti formulával definiált $\mathbf{U}^S\times\mathbf{V}^T\to(\mathbf{U}\otimes\mathbf{V})^{S\times T}$, $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\phi})\mapsto\boldsymbol{\psi}\otimes\boldsymbol{\phi}$ leképezés bilineáris. Azt kell csak megmutatnunk, hogy tenzorszorzás, azaz teljesíti a 24.2. állítás (ii) feltételét. Legyenek $\boldsymbol{\phi}_1,\dots,\boldsymbol{\phi}_n$ a $\mathbf{V}^T$ lineárisan független elemei, és $\boldsymbol{\psi}_1,\dots,\boldsymbol{\psi}_n$ az $\mathbf{U}^S$ olyan elemei, hogy $\sum_{k=1}^n \boldsymbol{\psi}_k(s)\otimes\boldsymbol{\phi}_k(t) = \mathbf{0}$ minden $(s,t)\in S\times T$ esetén. Ekkor az $\mathbf{U}^\star$ és $\mathbf{V}^\star$ minden $\boldsymbol{q}$ illetve $\boldsymbol{p}$ elemére $\sum_{k=1}^n (\boldsymbol{q}|\boldsymbol{\psi}_k(s))(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{\phi}_k(t)) = \mathbf{0}$, amiből a $\boldsymbol{p}$-t kiemelve, majd a szétválasztási tulajdonságot kihasználva azt következtetjük, hogy $\sum_{k=1}^n (\boldsymbol{q}|\boldsymbol{\psi}_k(s))\boldsymbol{\phi}_k = \mathbf{0}$ minden $\boldsymbol{q}\in\mathbf{U}^\star$ és $s\in S$ esetén; ez viszont a $\boldsymbol{\phi}_k$-k lineáris függetlenség miatt csak úgy lehetséges, hogy az együtthatók mind nullák, amiből ismét a szétválasztási tulajdonság miatt végül mekapjuk a kívánt eredményt: $\boldsymbol{\psi}_k = \mathbf{0}$ minden k-ra. ■

24.6. Állítás *Ha $\{\boldsymbol{u}_i \mid i\in I\}$ bázis $\mathbf{U}$-ban és $\{\boldsymbol{v}_k \mid k\in K\}$ bázis $\mathbf{V}$-ben, akkor*

$$\{\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{v}_k \mid i\in I, k\in K\}$$

bázis $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$-ben.

Bizonyítás Legyen F az I-nek G a K-nak véges részhalmaza, és α_{ik} $(i \in F, k \in G)$ olyan számok, hogy $\mathbf{0} = \sum_{i\in F}\sum_{k\in G} \alpha_{ik}\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_k = \sum_{k\in G}\left(\sum_{i\in F} \alpha_{ik}\boldsymbol{u}_i\right) \otimes \boldsymbol{v}_k$. Ekkor a tenzorszorzás alapvető tulajdonsága szerint a $\boldsymbol{v}_k$-k lineáris függetlensége miatt minden k-ra $\mathbf{0} = \sum_{i\in F} \alpha_{ik}\boldsymbol{u}_i$, amiből viszont az $\boldsymbol{u}_i$-k lineáris függetlensége miatt $\alpha_{ik} = 0$ minden $i \in F$ és $k \in G$ esetén, vagyis az $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ szóban forgó részhalmaza lineárisan független. Bázis is, mert $\boldsymbol{u} \in \mathbf{U}$ és $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ a bázis elemek (véges) lineáris kombinációja, $\boldsymbol{u} = \sum_{i\in F} \alpha_i\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{v} = \sum_{k\in G} \beta_k\boldsymbol{v}_k$, tehát

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = \sum_{i\in F}\sum_{k\in G} \alpha_i\beta_k\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_k;$$

tudjuk továbbá, hogy $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ bármely eleme $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ alakúak összege. ■

Mivel $\mathbf{V}$ akármilyen vektortér lehet, például egy vektortér duálisa is, mondjuk $\mathbf{V}^\star$, látjuk, hogy a 13.2. és a 13.3. állítás az itt bizonyítottnak speciális esetei.

Erdményünk következménye, hogy

$$\dim(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) = (\dim\mathbf{U})(\dim\mathbf{V}).$$

Ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ dimenziója és $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbf{U})$ dimenziója megegyezik, mindkettő véges, ezért a 24.4-ben adott $\Rrightarrow$ helyett $\equiv$ áll; sőt $\mathbf{V}^{\star\star} \equiv \mathbf{V}$ és $\mathbf{U}^{\star\star} \equiv \mathbf{U}$ miatt további azonosítások is érvényesek, amelyeket most felsorolunk; ha tehát $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} &\equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbf{U}) \equiv \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}^\star \times \mathbf{V}^\star, \mathbb{K}),\\
\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^\star &\equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \equiv \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}^\star \times \mathbf{V}, \mathbb{K}),\\
\mathbf{U}^\star \otimes \mathbf{V} &\equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbf{U}^\star) \equiv \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U} \times \mathbf{V}^\star, \mathbb{K}),\\
\mathbf{U}^\star \otimes \mathbf{V}^\star &\equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U}^\star) \equiv \mathrm{Lin}^2(\mathbf{U} \times \mathbf{V}, \mathbb{K}).
\end{aligned}$$

24.7. A 13. fejezetben már használtuk a $\otimes$ jelet. Ha $\boldsymbol{u} \in \mathbf{U}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$, akkor az ottani definíciónkkal $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{p} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U})$, a mostani definíciónkkal pedig $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{p} \in \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^\star \Rrightarrow \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^{\star\star}, \mathbf{U})$. Nyilvánvaló, hogy a 13. fejezetbeli $\mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés az itteni $\mathbf{V}^{\star\star} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés leszűkítése. A transzponálásra vonatkozóan is megegyezik az ottani és itteni eredményünk.

Most összegyűjtünk néhány egyszerű, de sokat használt azonosítást tenzorszorzatokra vonatkozóan. Kérjük az olvasót, ellenőrizze, hogy az alább felsorolt azonosítások helytállók (vagyis a formulákkal "természetes" izomorfizmusokat adunk meg).

(i) A 24.4. $(*)$ összefüggése szerint $\mathbb{K} \otimes \mathbf{V} \Rrightarrow \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbb{K}) = \mathbf{V}^{\star\star}$. Ennél azonban többet is mondhatunk:

$$\mathbb{K} \otimes \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}, \qquad \alpha \otimes \boldsymbol{v} \equiv \alpha\boldsymbol{v}.$$

Ez egyben példát nyújt arra is, hogy általában $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$ nem azonosítható az egész $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star,\mathbf{U})$-val, még akkor sem, ha $\mathbf{U}$ véges dimenziós.

Viszont ugyancsak 24.4. valamint 8.5. (v) szerint $\mathbf{V}\otimes\mathbb{K}\Rrightarrow\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^\star,\mathbf{V})\equiv\mathrm{Lin}(\mathbb{K},\mathbf{V})\equiv\mathbf{V}$, továbbá, mint az előbb, $\mathbf{V}\otimes\mathbb{K}\equiv\mathbf{V}$, $\boldsymbol{v}\otimes\alpha\equiv\alpha\boldsymbol{v}$, tehát itt $\Rrightarrow$ helyett $\equiv$ áll, amiből könnyen általánosíthatjuk (lásd a 24.13.1. feladatot), hogy $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}\equiv\mathrm{Lin}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós.

(ii)

$$(\mathbf{U}\times\mathbf{V})\otimes\mathbf{W}\equiv(\mathbf{U}\otimes\mathbf{W})\times(\mathbf{V}\otimes\mathbf{W}),\qquad(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w}\equiv(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}),$$

$$\mathbf{U}\otimes(\mathbf{V}\times\mathbf{W})\equiv(\mathbf{U}\otimes\mathbf{V})\times(\mathbf{U}\otimes\mathbf{W}),\qquad\boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\equiv(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w}).$$

(iii)

$$\mathbf{U}^\star\otimes\mathbf{V}^\star\Rrightarrow(\mathbf{U}\otimes\mathbf{V})^\star,\qquad(\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{p}|\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\equiv(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{u})(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v});$$

ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor $\Rrightarrow$ helyett $\equiv$ áll.

(iv) Sok matematikakönyvben azt mondják, hogy a tenzorszorzás kommutatív, azaz $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}\equiv\mathbf{V}\otimes\mathbf{U}$, $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\equiv\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}$. Valóban ez az azonosítás is lehetséges, azonban mi még sem élünk vele; az

$$\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}\to\mathbf{V}\otimes\mathbf{U},\qquad\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\mapsto\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}=:(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})^\star$$

transzponálás lineáris bijekciót határoz meg, amelynek a jelölését nem célszerű elhagyni.

Megmutatjuk, hogy ez a transzponálás megegyezik a korábban bevezetett fogalommal.

$\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$ a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star,\mathbf{U})$ altere, $\mathbf{V}\otimes\mathbf{U}$ a $\mathrm{Lin}(\mathbf{U}^\star,\mathbf{V})$ altere, ami viszont altere $\mathrm{Lin}(\mathbf{U}^\star,\mathbf{V}^{\star\star})$-nak. Az $\boldsymbol{L}:\mathbf{V}^\star\to\mathbf{U}$ lineáris leképezés transzponáltja az az $\boldsymbol{L}^\star:\mathbf{U}^\star\to\mathbf{V}^{\star\star}$ lineáris leképezés, amelyet

$$(\boldsymbol{L}^\star\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p})_{\mathbf{V}^\star}=(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{L}\boldsymbol{p})_{\mathbf{U}}\qquad(\boldsymbol{q}\in\mathbf{U}^\star,\boldsymbol{p}\in\mathbf{V}^\star)$$

határoz meg. Így tehát

$$\big((\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})^\star\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\big)=\big(\boldsymbol{q}|(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{p}\big)=(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{u})(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v})=$$
$$=\big((\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\big),$$

vagyis $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ transzponáltja valóban $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}$.

Lineáris leképezést (például egy mátrixot) nem célszerű azonosítani a transzponáltjával, ezért nem tekintjük a tenzorszorzást kommutatívnak. Egy másik érv az, hogy $\mathbf{U}=\mathbf{V}$ esetén $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}$ ugyanannak a vektortérnek különböző elemei.

24.8. Állítás *A*

$$\mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}\times\mathbf{V},\mathbf{W})\to\mathrm{Lin}(\mathbf{U}\otimes\mathbf{V},\mathbf{W}),\qquad \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{L_R}$$

hozzárendelés lineáris bijekció, ahol $\boldsymbol{L_R}$ az a lineáris leképezés, amellyel $\boldsymbol{R}$ faktorizálható a tenzorszorzaton keresztül (lásd 24.3. $(*)$).

Bizonyítás A linearitásról könnyű meggyőződni: $\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2=(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{R}_1}+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{R}_2})\circ\otimes$, stb.

Ha $\boldsymbol{L_R}=\mathbf{0}$, akkor nyilván $\boldsymbol{R}=\mathbf{0}$, tehát a lineáris hozzárendelés injektív. Adott $\boldsymbol{L}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{U}\otimes\mathbf{V},\mathbf{W})$ estén $\boldsymbol{R}:=\boldsymbol{L}\circ\otimes\in\mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}\times\mathbf{V},\mathbf{W})$, amelyre $\boldsymbol{L_R}=\boldsymbol{L}$, tehát a hozzárendelés szürjektív.

Ezt a "kitüntetett" lineáris bijekciót felhasználhatjuk arra, hogy a szóban forgó két vektorteret azonosítsuk:

$$\mathrm{Lin}(\mathbf{U}\otimes\mathbf{V},\mathbf{W})\equiv\mathrm{Lin}^2(\mathbf{U}\times\mathbf{V},\mathbf{W}),\qquad \boldsymbol{L}\equiv\boldsymbol{L}\circ\otimes.$$

24.9. A $\mathbf{V}\times\mathbf{V}^\star\to\mathbb{K}$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\to(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})$ bilineáris forma egyértelműen faktorizálható a tenzorszorzaton keresztül, azaz létezik egyetlen

$$\mathrm{Tr}:\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}^\star\to\mathbb{K},\qquad \boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{p}\mapsto(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})$$

lineáris leképezés. Hangsúlyozzuk, hogy a fenti formula nem a definíciója Tr-nek, hanem csak a definiáló tulajdonsága: a Tr lineáris leképezést egyértelműen meghatározzák az $\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{p}$ elemeken felvett értékei, noha $\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}^\star$ nem minden eleme ilyen, hanem ilyenek lineáris kombinációja.

Ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós, akkor $\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}^\star\equiv\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, és $\boldsymbol{A}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ esetén $\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}$-t az $\boldsymbol{A}$ **nyomának** hívjuk.

1. Állítás *Ha* $\dim\mathbf{V}<\infty$, *akkor*

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{BA})\qquad(\boldsymbol{AB}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V})).$$

Bizonyítás Értelemszerű jelöléssel $(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{p})(\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{q}$, tehát $\mathrm{Tr}\big((\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{p})(\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{q})\big)=\mathrm{Tr}\big((\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{q})(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{p})\big)$, amiből egyszerűen kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

2. Állítás *Ha* $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_N\}$ *a* $\mathbf{V}$ *egy bázisa és* $\{\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_N\}$ *ennek a duálisa, akkor*

$$\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}=\sum_{k=1}^{N}(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k)\qquad(\boldsymbol{A}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V})).$$

Bizonyítás A fenti formula a 12.4. végén levő összefüggésből adódó

$$(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{N}(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x})(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v}_k) = \sum_{k=1}^{N}(\boldsymbol{p}_k|(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}_k)$$

egyenlőségből következik. ■

Vegyük észre, hogy a fenti összegben az $\boldsymbol{A}$ (a szóban forgó bázisra vonatkozó) mátrixának főátlóbeli tagjai szerepelnek. Tehát egy $\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ lineáris leképezés nyoma egyenlő bármely mátrixa főátlóbeli tagjainak az összegével.

Az előbbiekhez hasonlóan értelmezhetjük $\dim\mathbf{V}<\infty$ esetén a

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star) \equiv \mathbf{V}^\star\otimes\mathbf{V}\to\mathbb{K}, \qquad \boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{x}\mapsto(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x})$$

nyomot. Mivel $\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{p}$ transzponáltja $\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{x}$ és a transzponálás lineáris művelet, azonnal adódik, hogy

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^\star) = \mathrm{Tr}\boldsymbol{A} \qquad (\boldsymbol{A}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V}),$$

amit abból is tudhatunk, hogy $\boldsymbol{A}^\star$ bármely mátrixa az $\boldsymbol{A}$ megfelelő mátrixának a transzponáltja, és egy mátrixnak és a transzponáltjának a főátlója megegyezik.

Jegyezzük meg, hogy $\mathbf{V}\to\mathbf{V}^\star$ és $\mathbf{V}^\star\to\mathbf{V}$ lineáris leképezések nyoma nem értelmezhető, noha ezek mátrixából is képezhető a főátlóbeli tagok összege; ez az összeg azonban függ a koordinátázástól. Ez hasonló ahhoz, mint amit a szimmetrikusságról, illetve a determinánsról mondtunk (lásd 14.5., 15.4. és 22.7.). A fönn-lenn indexezéssel úgy fogalmazhatunk, csak olyan mátrixnak a nyoma értelmes, amelyek két indexe ellentétes helyzetben van.

24.10. Fizikai alkalmazásokban gyakran talákozunk olyan tenzorszorzatokkal, amelyekben az egyik (vagy mindkét) vektortér egy dimenziós (speciálisan mértékegyenes). Ekkor célszerűnek látjuk a transzponálás jelölését elhagyni, és a 24.7. (iv)-ben említett azonosítást megtenni. Sőt tovább megyünk: elhagyjuk még a tenzorszorzás jelét is. Közelebbről tehát:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{V}\equiv\mathbf{V}\otimes\mathbf{A}, \qquad \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{a} =: \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} \quad \text{ha } \dim\mathbf{A}=1.$$

Jegyezzük meg, hogy $\mathbf{A}\otimes\mathbf{V}$ minden eleme $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}$ alakú, mert ha $\boldsymbol{a}_k\in\mathbf{A}$, akkor van olyan $\boldsymbol{a}\in\mathbf{A}$ és $\alpha_k\in\mathbb{K}$, hogy $\boldsymbol{a}_k=\alpha_k\boldsymbol{a}$, tehát $\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\boldsymbol{x}_k$.

Noha $\mathbf{A}\neq\mathbb{K}$ esetén $\mathbf{A}\otimes\mathbf{V}\neq\mathbf{V}$, mégis értelmet adhatunk annak, hogy egy $\mathbf{V}$-beli $\boldsymbol{x}$ elem **párhuzamos** egy $\mathbf{A}\otimes\mathbf{V}$-beli $\boldsymbol{r}$ elemmel: ha van olyan $\boldsymbol{a}\in\mathbf{A}$, hogy $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}$.

A fenti megállapodás szerint az egy dimenziós $\mathbf{A}$ vektortér elmeinek egymással való tenzorszorzatából is elhagyjuk a $\otimes$ jelet; ennél több egyszerűsítést is teszünk:

egy $\boldsymbol{a}$ elem önmagával vett tenzorszorzatát 2-es hatvánnyal írjuk: $\boldsymbol{a}^2 := \boldsymbol{aa} := \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a}$.

24.11. Ha $\mathbf{A}$ egy dimenziós vektortér és $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a}$, akkor a 3.5. értelmében bármely $\boldsymbol{b} \in \mathbf{A}$ esetén $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{K}$ jelöli azt az egyértelműen meghatározott számot, amellyel $\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$.

Ha $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$ és $\boldsymbol{h} \in \mathbf{A}^\star$, akkor $\boldsymbol{ah} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ – ne feledjük, hogy egy dimenziós vektortér esetén elhagyjuk a tenzorszorzás jelét, tehát $\boldsymbol{ah} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{h}$ –, és

$$(\boldsymbol{ah})\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{h}|\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{h}|\boldsymbol{a})\boldsymbol{b},$$

hiszen nyilván fennáll az egyenlőség, ha $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, és ha $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\left(\boldsymbol{h}|\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\right)\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{h}|\boldsymbol{a})\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$.

Ha $\mathbf{A}$ egy dimenziós vektortér, akkor az $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$ lineáris leképezések összessége azonosítható a $\mathbb{K}$ alaptesttel; $\alpha \in \mathbb{K}$ mint lineáris leképezés az $\boldsymbol{a}$ elemhez $\alpha\boldsymbol{a}$-t rendeli.

Így a mondotak alapján az

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^\star \equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{K}, \qquad \boldsymbol{ah} \equiv (\boldsymbol{h}|\boldsymbol{a})$$

azonosítást tehetjük.

24.12. Legyen $\mathbf{A}$ egy dimenziós valós vektortér. Ekkor $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$ is egy dimenziós vektortér, amelyet természetes irányítással láthatunk el úgy, hogy a pozitív elemek halmaza

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^+ := \{\boldsymbol{a}^2 \mid \boldsymbol{a} \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

Világos, hogy ez a definíció jó, a szóban forgó halmaz félegyenes: ha $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$, akkor $\mathbb{R}^+(\boldsymbol{a}^2)$ alakba is írható.

Ha $\mathbf{A}$ is irányított (azaz mértékegyenes), akkor

$$\mathbf{A}_0^+ \to (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})_0^+, \qquad \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}^2$$

bijekció. Valóban, az előzőek szerint szürjekció, és injekció is a következő miatt. Ha $\boldsymbol{a}^2 = \mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Ha $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{A}^+$ és $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2$, akkor $\boldsymbol{a}^2 = \left(\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right)^2 \boldsymbol{a}^2$, amiből $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} > 0$ miatt $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = 1$, és így $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

A fenti bijekció inverzét **gyökvonásnak** hívjuk, és így jelöljük:

$$\sqrt{} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})_0^+ \to \mathbf{A}_0^+.$$

Vegyük észre, hogy (lásd 23.4.), hogy

$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |\boldsymbol{a}| \qquad (\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}).$$

24.13. Feladatok

1. Legyen $\mathbf{V}$ vektortér, $N \in \mathbb{N}$. Ekkor (lásd a 11.7.7. feladatot)

$$\mathbb{K}^N \otimes \mathbf{V} \Rrightarrow \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbb{K}^N) \equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbb{K})^N = (\mathbf{V}^{\star\star})^N,$$

és 11.5. valamint 8.5. (v) alapján

$$\mathbf{V} \otimes \mathbb{K}^N \Rrightarrow \mathrm{Lin}\left((\mathbb{K}^N)^\star, \mathbf{V}\right) \equiv \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbf{V}) \equiv \mathrm{Lin}(\mathbb{K}, \mathbf{V})^N \equiv \mathbf{V}^N$$

Bizonyítsuk be, hogy ennél több is mondható:

$$\mathbb{K}^N \otimes \mathbf{V} \equiv \mathbf{V} \otimes \mathbb{K}^N \equiv \mathbf{V}^N, \qquad \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{\xi} \equiv (\xi_1 \boldsymbol{x}, \dots, \xi_N \boldsymbol{x}).$$

2. Legyen $\mathbf{P}$ a polinomok vektortere. Jellemezzük $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}$-t mint a $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvények vektorterének lineáris alterét (24.5. szerint polinomok tenzorszorzata "két változós komplex polinom").

3. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ minden nem nulla eleme $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{u}_k \otimes \boldsymbol{v}_k$ alakú, ahol mind az $\boldsymbol{u}_k$-k mind az $\boldsymbol{v}_k$-k lineárisan függetlenek.

4. Mutassuk meg, hogy ha $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N\}$ a $\mathbf{V}$ egy bázisa és $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N\}$ ennek a duálisa, akkor $\boldsymbol{S} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbf{U})$ esetén $\boldsymbol{S} = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_k) \otimes \boldsymbol{v}_k$, és ez a formula konkrétan megadja a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbf{U}) \equiv \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ azonosítást.

5. Ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektorterek, akkor $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^\star \equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U})$ és $\mathbf{U}^\star \otimes \mathbf{V} \equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbf{U}^\star)$, így 24.7.(iii) alapján $\left(\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U})\right)^\star \equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbf{U}^\star)$. Mutassuk meg, hogy ebben az azonosításban $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{S}) \equiv \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^\star \boldsymbol{S})$, ahol $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U}^\star)$, $\boldsymbol{S} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbf{U})$.

Ezek szerint a $\mathbb{K}^N \equiv (\mathbb{K}^N)^\star$ azonosítással $\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^M) \equiv \left(\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^M)\right)^\star$, azaz $\mathbb{K}^{M \times N} \equiv \left(\mathbb{K}^{M \times N}\right)^\star$, amit már jól tudunk. Igazoljuk, hogy a kétféle azonosítás valóban megegyezik, azaz $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^\star \boldsymbol{S}) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} A_{ik} S_{ik}$.

6. Legyen $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{U})$, $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \mathrm{Tr}\boldsymbol{A} + \mathrm{Tr}\boldsymbol{B}$.

7. A 24.5. jelöléseivel $\Rrightarrow$ helyett $\equiv$ áll, ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ véges dimenziós, valamint S és T közül legalább az egyik véges halmaz.

25. Tenzorhatványok

25.1. A tenzorszorzás "asszociatív": két vektortér tenzorszorzatát tenzorszorozhatjuk egy harmadik vektortérrel, és a különböző sorrendű szorzatok azonosíthatók; értelemszerű jelölésekkel

$$(\mathbf{U}\otimes\mathbf{V})\otimes\mathbf{W}\equiv\mathbf{U}\otimes(\mathbf{V}\otimes\mathbf{W}),\qquad(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w}\equiv\boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}).$$

Ezért a zárójelet el is hagyjuk, és $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}\otimes\mathbf{W}$-t illetve $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$-t írunk.

Három vektortér adott sorrendű tenzorszorzatát másképp is értelmezhetjük a 24.1. definíció mintájára. $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}\otimes\mathbf{W}$ olyan vektortér, és $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\mapsto\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$ olyan trilineáris leképezés, hogy bármely $\boldsymbol{R}:\mathbf{U}\times\mathbf{V}\times\mathbf{W}\to\mathbf{Z}$ trilineáris leképezéshez létezik egyetlen olyan $\boldsymbol{L}:\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}\otimes\mathbf{W}\to\mathbf{Z}$ lineáris leképezés, hogy $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})$.

Ezek után nyilvánvaló, hogyan értelmezzük $n\geq 2$ esetén a $\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{V}_n$ vektorterek adott sorrendű tenzorszorzatát, amelyre a $\bigotimes_{k=1}^{n}\mathbf{V}_k$ jelölést használjuk, és hasonlóképp jelöljük az $\boldsymbol{x}_k\in\mathbf{V}_k$ elemek tenzorszorzatát is: $\bigotimes_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k$.

Míg két vektortér, $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ tenzorszorzatát akár $\mathbf{V}^\star\to\mathbf{U}$ lineáris leképezésekkel akár $\mathbf{U}^\star\times\mathbf{V}^\star\to\mathbb{K}$ bilineáris leképezésekkel tudjuk egyszerűen realizálni, addig több vektortér tenzorszorzatának egyszerű realizálására csak a multilineáris leképezések alkalmasak (persze itt is lehetne használni bizonyos lineáris leképezéseket a 19.3. állítás és az utána levő megjegyzés szerint, de azoknak lényege éppen az, hogy bonyolult objektumokat egyszerűbbekkel azonosítanak).

Nem nehéz megmutatni 24.4. mintájára, hogy

$$\bigotimes_{k=1}^{n}\mathbf{V}_k\Rrightarrow\mathrm{Lin}^n\left(\bigtimes_{k=1}^{n}\mathbf{V}_k^\star,\mathbb{K}\right),\quad\left(\bigotimes_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k\right)(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n)\equiv\prod_{k=1}^{n}(\boldsymbol{p}_k|\boldsymbol{x}_k).$$

Ha $\mathbf{V}_k$-k véges dimenziósasak, akkor $\Rrightarrow$ helyett $\equiv$ áll.

25.2. A tenzorszorzatok használatának nagy előnye, hogy áttekinthetővé teszi a 19.3-ban megadott és ahhoz hasonló azonosításokat.

Három vektortérre például $\mathbf{V}_1^\star\otimes\mathbf{V}_2^\star\otimes\mathbf{V}_3^\star$ az egyik zárójelezéssel a

$$\mathbf{V}_1^\star\otimes\mathbf{V}_2^\star\otimes\mathbf{V}_3^\star\equiv(\mathbf{V}_1^\star\otimes\mathbf{V}_2^\star)\otimes\mathbf{V}_3^\star\equiv\mathrm{Lin}(\mathbf{V}_3,\mathbf{V}_1^\star\otimes\mathbf{V}_2^\star)\equiv\mathrm{Lin}(\mathbf{V}_3,\mathrm{Lin}^2(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2,\mathbb{K}))$$

$$\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_3\equiv\big(\boldsymbol{v}_3\mapsto\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{p}_3|\boldsymbol{v}_3)\big)$$

azonosítást adja, a másik zárójelezéssel a

$$\mathbf{V}_1^\star \otimes \mathbf{V}_2^\star \otimes \mathbf{V}_3^\star \equiv \mathbf{V}_1^\star \otimes (\mathbf{V}_2^\star \otimes \mathbf{V}_3^\star) \equiv \mathbf{V}_1^\star \otimes (\mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_3)^\star \equiv$$
$$\equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_1^\star) \equiv \mathrm{Lin}^2(\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3, \mathrm{Lin}(\mathbf{V}_1, \mathbb{K})),$$
$$\boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2 \otimes \boldsymbol{p}_3 \equiv \big((\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \mapsto \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{p}_2|\boldsymbol{v}_2)(\boldsymbol{p}_3|\boldsymbol{v}_3)\big)$$

azonosítást, ahol az elemekre csak a legegyszerűbb (és egyben legfontosabb, mert könnyen észben tartható) formulát írtuk ki.

Kérjük az olvasót, általánosítsa ezeket az összefüggéseket $n > 3$ esetére, és vesse össze a 19.3-ban leírt azonosításokkal.

25.3. Most $n \in \mathbb{N}_0$ esetére egyetlen $\mathbf{V}$ vektortérnek önmagával vett n-szeres tenzorszorzatát, azaz n-edik **tenzorhatványát** vizsgáljuk, amelyet $\overset{n}{\otimes}\mathbf{V}$-vel jelölünk. Ha $n \leq 2$, akkor ez az előbbiek szerint van értelemzve, és

$$\overset{0}{\otimes}\mathbf{V} := \mathbb{K}, \qquad \overset{1}{\otimes}\mathbf{V} := \mathbf{V}.$$

A tenzorszorzás asszociativitása miatt bármely n és m nemnegatív egész számra

$$\Big(\overset{n}{\otimes}\mathbf{V}\Big) \otimes \Big(\overset{m}{\otimes}\mathbf{V}\Big) \equiv \overset{n+m}{\otimes}\mathbf{V}. \tag{$*$}$$

Mint tudjuk, $\overset{n}{\otimes}\mathbf{V} \Rrightarrow \mathrm{Lin}((\mathbf{V}^\star)^\star, \mathbb{K})$; az $\boldsymbol{x}_k$ vektorokkal a 20.6-ban bevezettük a $\overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}} \boldsymbol{x}_k$ jelölést; egyszerűen látható, hogy az ottani értelmezés megegyezik az itteniével, tehát amit ott elmondtunk, az igaz lesz a tenzorszorzatokra. Például bevezethetjük a $\overset{n}{\underset{k=1}{\vee}} \boldsymbol{x}_k$ szimmetrikus és $\overset{n}{\underset{k-1}{\wedge}} \boldsymbol{x}_k$ antiszimmetrikus tenzorszorzatot.

Ugyanúgy, mint 20.3-ban, igaz, hogy ha $\mathbf{V}$ véges dimenziós és $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$ a $\mathbf{V}$ egy bázisa, akkor

$$\left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \boldsymbol{v}_{k_i} \,\middle|\, 1 \leq k_i \leq N, i = 1, \ldots, n \right\},$$
$$\left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} \boldsymbol{v}_{k_i} \,\middle|\, 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n \leq N, \right\},$$
$$\left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} \boldsymbol{v}_{k_i} \,\middle|\, 1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leq N \right\}$$

rendre bázis $\overset{n}{\otimes}\mathbf{V}$-ben, $\overset{n}{\vee}\mathbf{V}$-ben és $\overset{n}{\wedge}\mathbf{V}$-ben, és a dimenziókra is igaz, ami 20.3-ban.

Természetesen $\mathbf{V}$ helyett tekinthetjük $\mathbf{V}^\star$-ot is. A $(*)$ összefüggés átírásával az előzőeknek megfelelő azonosításokat kapjuk: minden $k, n \in \mathbb{N}$ és $k < n$ esetén

$$\overset{n}{\otimes}\mathbf{V}^\star \equiv \left(\overset{k}{\otimes}\mathbf{V}^\star\right) \otimes \left(\overset{n-k}{\otimes}\mathbf{V}^\star\right) \Rrightarrow \mathrm{Lin}\left(\overset{n-k}{\otimes}\mathbf{V}, \overset{k}{\otimes}\mathbf{V}^\star\right),$$
$$\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \boldsymbol{p}_i \equiv \left(\overset{n}{\underset{i=k+1}{\otimes}} \boldsymbol{x}_i \mapsto \overset{k}{\underset{i=1}{\otimes}} \boldsymbol{p}_i \prod_{i=k+1}^{n} (\boldsymbol{p}_i|\boldsymbol{x}_i) \right).$$

Értelemszerűen hasonló formulák érvényesek, ha $\otimes$ helyett $\wedge$-ot vagy $\vee$-ot írunk.

25.4. Egy érdekes és hasznos kapcsolatot találhatunk az antiszimmetrikus tenzorszorzatok és lineáris leképezések nyoma között.

Állítás *Legyen* $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N$ *a* $\mathbf{V}$ *bázisa,* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. *Ekkor*

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1) \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_N + \\ + \boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2) \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_N + \dots \\ \dots + \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge (\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_N) = (Tr\boldsymbol{A}) \bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}_k.$$

Bizonyítás Legyen $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N$ a bázis duálisa. Ekkor 12.4. $(**)$ szerint $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{p}_i|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_i$; a fenti formula bal oldalán álló első tagba betéve ezt az összeget, csak az összeg első tagja eredményez nem nulla járulékot (az antiszimmetrikusság miatt), ezért az első tag $(\boldsymbol{p}_1|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_N$ alakú lesz; hasonlóan, a második tag $(\boldsymbol{p}_2|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{v}_N$, stb. Már csak a 24.9.2. állítást kell alkalmaznunk, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

25.5. Egy dimenziós valós irányított vektortérnek nem csak nemnegatív egész kitevőjű, hanem akármilyen nem nulla kitevőjű tenzorhatványa is értelmezhető. Ezzel lehet pontos éretelmet adni a fizikában olykor előforduló tört kitevőjű mértékegykségeknek (pl. $m^{1/2}$).

A tenzorszorzást a számok szorzásának a mintájára, annak általánosításaként vezettük be; meghatározó tulajdonságai, hogy bilineáris művelet, és bizonyos szempontból a "legbővebb" : minden más bilineáris ebből származtatható egy lineáris leképezéssel. Ehhez hasonlóan a számok hatványozásának a mintájára bevezetjük az tenzorhatványozás fogalmát, amelyhez az alábbi előkészületek kellenek.

Definíció *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy dimenziós valós irányított vektortér,* $\mathbf{W}$ *valós vektortér,* $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$. *Egy* $R : \mathbf{A}_0^+ \to \mathbf{W}$ *leképezést* β***-adik hatványszerűnek*** *nevezzük, ha*

$$R(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda^\beta R(\boldsymbol{a}) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_0^+, \boldsymbol{a} \in \mathbf{A}_0^+).$$

Világos, hogy $R(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, és ha R nem az azonosan nulla függvény, akkor az értékkészlete egy félegyenes, azaz valamely elemnek nemnegatív számszorosaiból áll.

Az $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $\alpha \mapsto \alpha^\beta$ leképezés β-adik hatványszerű, természetesen, hiszen épp ezt akarjuk utánozni.

Példa ettől különböző nemnulla β-adik hatványszerű leképezésre: legyen $\mathbf{A}$

akármilyen egy dimenziós valós irányított vektortér, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{h} \in \mathbf{A}^\star$, és

$$\mathbf{A}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{a} \mapsto \text{sign}\boldsymbol{h}|(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{a})|^\beta; \tag{$*$}$$

($\boldsymbol{A}$ irányítása megatározza $\boldsymbol{A}^*$ egy irányítását, így értelmes sign$\boldsymbol{h}$.) Megmutatjuk, hogy minden $R : \mathbf{A}_0^+ \to \mathbb{R}$ β-adik hatványszerű leképezés ilyen. Ha $R \neq 0$, akkor R értékkészlete vagy a nemnegatív vagy a nempozitív számok összessége; eszerint értelmezzük az R előjelét: $\text{sign}R := 0$, ha $R = 0$, $\text{sign}R := 1$, ha $\text{Ran}R = \mathbb{R}_0^+$ és $\text{sign}R := -1$ ha $\text{Ran}R = \mathbb{R}_0^-$.

Állítás *Ha $R : \mathbf{A}_0^+ \to \mathbb{R}$ β-adik hatványszerű leképezés, akkor*

$$\boldsymbol{h}_R : \mathbf{A} \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{a} \mapsto (\text{sign}R)(\text{sign}\boldsymbol{a})|R(|\boldsymbol{a}|)|^{1/\beta}$$

olyan lineáris leképezés, amellyel R a $(*)$ formában fejezhető ki.

Bizonyítás Mivel egy dimenziós vektortéren a számmal szorzás meghatározza az összeadást, $\boldsymbol{h}_R$ linearitásához elég megmutatni, hogy az állításban alóla a számmal szorzás kihozható. Íme:

$$\boldsymbol{h}_R(\alpha\boldsymbol{a}) = (\text{sign}R)\text{sign}(\alpha\boldsymbol{a})|R(|\alpha||\boldsymbol{a}|)|^{1/\beta} = (\text{sign}\alpha)|\alpha|(\text{sign}R)(\text{sign}\boldsymbol{a})R(|\boldsymbol{a}|)|^{1/\beta} =$$
$$= \alpha\boldsymbol{h}_R(\boldsymbol{a}).$$

Az pedig már nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{h}_R$-rel R a $(*)$ formula szerint kapható meg. ■

Eredményünk szerint $R \mapsto \boldsymbol{h}_R$ bijekció az

$$\{\mathbf{A}_0^+ \to \mathbb{R} \quad \beta\text{-adik hatványszerű leképezések}\}$$

halmaz és $\mathbf{A}^\star$ között. Ezzel értelmezzük a fenti halmaz elemeinek összegét és számszorosát úgy, hogy a bijekció legyen lineáris. Így az ilyen hatványszerű leképezések egy dimenziós vektorteret alkotnak. Tehát értelemszerű jelöléssel az összeg és a számszoros úgy van értelmezve, hogy

$$\boldsymbol{h}_{R+S} = \boldsymbol{h}_R + \boldsymbol{h}_S, \qquad \boldsymbol{h}_{\alpha R} = \alpha\boldsymbol{h}_R.$$

25.6. Definíció *Legyen $\mathbf{A}$ egy dimenziós valós irányított vektortér, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{A}$-nak a β-**adik tenzorhatványa** egy $(\mathbf{B}, r)$ pár, ahol*

(i) $\mathbf{B}$ valós vektortér,
(ii) $r : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ β-adik hatványszerű

amelyekre az teljesül, hogy ha $\mathbf{W}$ vektortér és $R : \mathbf{A} \to \mathbf{W}$ β-adik hatványszerű, akkor létezik egyetlen olyan $\boldsymbol{L} : \mathbf{B} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés, hogy

$$R = \boldsymbol{L} \circ r.$$

Állítás $(\mathbf{B}, r)$ *az* $\mathbf{A}$*-nak pontosan akkor a* β*-adik tenzorhatványa, ha*

(i) $r \neq \mathbf{0}$,

(ii) $\mathrm{Span}(\mathrm{Ran} r) = \mathbf{B}$.

Bizonyítás Ha a fenti két feltétel teljesül, akkor bármely β-adik hatványszerű R esetén az $\boldsymbol{L}(\pm r(\boldsymbol{a})) := \pm r(\boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}_0^+)$ formulával meghatározott leképezés $\mathbf{B}$-n jól definiált, lineáris és egyetlen az $\boldsymbol{L} \circ r = R$ tulajdonsággal.

Ugyanis ekkor $\mathrm{Ran} r$ félegyenes, tehát $\mathbf{B}$ egy dimenziós, és $\boldsymbol{L}$ az egész $\mathbf{B}$-n értelmezve van. Továbbá r nem nulla elemet nem nullába képez, és ha $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{A}^+$ és $r(\boldsymbol{a}) = r(\boldsymbol{b})$, akkor a a 3.5.-ben bevezetett jelöléssel $r(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right)^{\beta} r(\boldsymbol{a})$, amiből $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = 1$ azaz $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ adódik, és így az következik, hogy $\boldsymbol{L}$ jól definiált. $\boldsymbol{L}$ lineáris, mert ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor tetszőleges $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}^+$ esetén

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}(\alpha r(\boldsymbol{a})) &= \boldsymbol{L}(\mathrm{sign}\alpha|\alpha| r(\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{L}(\mathrm{sign}\alpha\, r(|\alpha|^{\beta}\boldsymbol{a})) = \mathrm{sign}\alpha\, r(|\alpha|^{\beta}\boldsymbol{a}) = \alpha r(\boldsymbol{a}) = \\ &= \alpha \boldsymbol{L}(r(\boldsymbol{a})),\end{aligned}$$

és egy dimenziós valós vektortéren a számmal való szorzás meghatározza az összeadást is (lásd 3.5.). $\boldsymbol{L}$ egyértelműsége a $\mathbf{B}$ egy dimenziósságából következik.

Ha (ii) nem teljesül, akkor $\boldsymbol{L}$ nem egyértelmű: $\mathrm{Span}(\mathrm{Ran} r)$ egy kiegészítőjén akárhogy lehet definiálva. Ha (i) nem teljesül, azaz $r = \mathbf{0}$, akkor egy nem nulla β-adik hatványszerű leképezés (ilyen van 25.5 szerint) nem faktorizálható r-en keresztül.

25.7. Ugyanúgy, mint tenzorszorzatok esetén, megmutathatjuk, hogy a β-adik tenzorhatvány egyetlen izomorfizmus erejéig egyértelmű, ezért "a" tenzorhatványról szoktunk beszélni, és a definícióban szereplő $\mathbf{B}$-t $\mathbf{A}^{\otimes\beta}$-val, az r leképezést pedig $\boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}^{\beta}$-val jelöljük. Ha tehát $R : \mathbf{A}_0^+ \to \mathbf{W}$ egy β-adik hatványszerű leképezés, akkor létezik egyértelműen egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{A}^{\otimes\beta} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés, amellyel

$$R(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}^{\beta}) \qquad (\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}_0^+).$$

Már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy létezik β-adik tenzorhatvány. Emlékeztetünk arra, hogy $\mathbf{A}$ duálisa is irányított: $\boldsymbol{h} \in \mathbf{A}^{\star}$ pozitív, ha $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}^+$ esetén $(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{a}) > 0$.

Legyen $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}_0^+$, és

$$\boldsymbol{a}^{\beta} : (\mathbf{A}^{\star})_0^+ \to \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{h} \mapsto (\boldsymbol{h}|\boldsymbol{a})^{\beta}.$$

Világos, hogy $\boldsymbol{a}^{\beta}$ az $\mathbf{A}^{\star}$-on értelmezett β-adik hatványszerű leképezés, és az is nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}^{\beta}$ szintén β-adik hatványszerű, és ez utóbbi teljesíti a 25.6. állítás feltételeit, hiszen $\mathbf{A}^{\star}$ egy dimenziós, így a 25.5. szerint az $(\mathbf{A}^{\star})_0^+$-on értelmezett valós értékű β-adik hatványszerű leképezések vektortere is egy dimenziós.

Tehát

$$\mathbf{A}^{\otimes\beta} \equiv \{(\mathbf{A}^\star)_0^+ \to \mathbb{R}\ \beta\text{-adik hatványszerű}\}, \qquad \boldsymbol{a}^\beta \equiv (\boldsymbol{h} \mapsto (\boldsymbol{h}|\boldsymbol{a})^\beta).$$

25.8. Az olvasóra bízzuk, igazolja az alábbi azonosítások helyességét: ha $\boldsymbol{a}$ és $\mathbf{B}$ egy dimenziós vektorterek, $\beta, \delta \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor

(i)

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\otimes\beta} \equiv \mathbf{A}^{\otimes\beta} \otimes \mathbf{B}^{\otimes\beta}, \qquad (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})^\beta \equiv \boldsymbol{a}^\beta \otimes \boldsymbol{b}^\beta \qquad (\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}_0^+, \boldsymbol{b} \in \mathbf{B}_0^+),$$

(ii)

$$(\mathbf{A}^{\otimes\beta})^{\otimes\delta} \equiv \mathbf{A}^{\otimes\beta\delta}, \qquad (\boldsymbol{a}^\beta)^\delta \equiv \boldsymbol{a}^{\beta\delta} \qquad (\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}_0^+),$$

(iii)

$$\mathbb{R}^{\otimes\beta} \equiv \mathbb{R}, \qquad \alpha^{\otimes\beta} \equiv \alpha^\beta \qquad (\alpha \in \mathbb{R}_0^+),$$

(iv)

$$(\mathbf{A}^\star)^{\otimes\beta} \equiv \left(\mathbf{A}^{\otimes\beta}\right)^\star \qquad \left(\boldsymbol{h}^\beta|\boldsymbol{a}^\beta\right) \equiv (\boldsymbol{h}|\boldsymbol{a})^\beta \qquad (\boldsymbol{h} \in (\mathbf{A}^\star)_0^+, \boldsymbol{a} \in \mathbf{A}_0^+),$$

(v)

$$\mathbf{A}^{\otimes n} \equiv \overset{n}{\otimes} \mathbf{A}, \qquad \boldsymbol{a}^n \equiv \overset{n}{\otimes} \boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}_0^+).$$

Megjegyezzük, már korábban is $\overset{n}{\otimes} \boldsymbol{a}$ helyett az $\boldsymbol{a}^n$ jelölést alkalmaztuk, tehát az utolsó formula azt mutatja, hogy $\boldsymbol{a}^n$ korábbi és mostani értelmezése megegyezik.

25.9. Feladatok

1. Szemléltessük az $(1,1) \otimes (1,0) \otimes (0,1,1)$ hipermátrixot mint egy tégla-elrendezést!

2. Igazoljuk, hogy $n = 2$ esetén a 24.12-ben értelmezett gyökvonás azonos(ítható) a 25.5-ben értelmezett 1/2-edik tenzorhatványozással.

3. Legyen $\mathbf{A}$ mértkegyenes (egy dimenziós valós irányított vektortér) és $n \geq 2$ egész szám. Értelmezzük a 24.12. mintájára az

$$\sqrt[n]{} := \begin{cases} \overset{n}{\otimes} \mathbf{A} \to \mathbf{A}, & \text{ha } n \text{ páratlan}, \\ \left(\overset{n}{\otimes} \mathbf{A}\right)_0^+ \to \mathbf{A}_0^+ & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

n-edik gyökvonvást. Mutassuk meg, hogy páros n -re ez azonos a 25.5-beli $1/n$-edik tenzorhatványozással, páratlan n-re pedig annak kiterjesztése.

26. Tenzorhányadosok

26.1. Vektorok tenzorszorzását a számok szorzásának mintájára, annak általánosításaként vezettük be; meghatározó tulajdonságai, hogy bilineáris művelet, és bizonyos szempontból a "legbővebb" : minden más bilineáris ebből származtatható egy lineáris leképezéssel. Ehhez hasonlóan a számok osztásának a mintájára bevezetjük a tenzorosztás fogalmát, amelyhez az alábbi előkészületek kellenek.

Definíció *Legyen* $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ *és* $\mathbf{A}$ *vektortér (azonos test felett),* $\dim\mathbf{A} = 1$. *Egy* $\boldsymbol{Q} : \mathbf{V} \times (\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbf{W}$ *leképezést* ***lineáris-hányadosnak*** *hívunk, ha*

(i) $\boldsymbol{Q}(\cdot, \boldsymbol{a})$ *lineáris minden* $\boldsymbol{a} \in (\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\})$ *esetén,*

(ii) $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{a}) = \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ *minden* $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ *és* $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\}$ *esetén.*

Nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{Q}$ értékészlete lineáris altér. Vegyük továbbá észre, hogy

$$\boldsymbol{Q}(x, \alpha\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{Q}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha}, \boldsymbol{a}\right) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}, \boldsymbol{a} \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\}).$$

Lineáris-hányados a $\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbb{K}$, $(\beta, \alpha) \to \frac{\beta}{\alpha}$ leképezés, természetesen, hiszen ezt akarjuk utánozni.

Példa ettől különböző nemnulla lineáris-hányados leképezésre: bármely $\mathbf{A}$ egy dimenziós vektortér esetén a 3.5. jelöléssel

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \mapsto \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}},$$

és bármely $\mathbf{V}$ vektortér esetén

$$\mathbf{V} \times (\mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbf{V}, \quad (\boldsymbol{x}, \alpha) \to \frac{\boldsymbol{x}}{\alpha}.$$

Továbbá ha $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{h} \in \mathbf{A}^\star$, akkor

$$\mathbf{V} \times (\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbf{V}, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \to \frac{\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{a})}.$$

26.2. Definíció *Legyen* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{A}$ *(azonos test fölötti) vektortér,* $\dim\mathbf{A} = 1$. *A* $\mathbf{V}$*-nek az* $\mathbf{A}$*-val vett* ***tenzorhányadosa*** *egy* $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{q})$ *pár, ahol*

(i) $\mathbf{Z}$ *vektortér,*

(ii) $\boldsymbol{q} : \mathbf{V} \times (\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbf{Z}$ *lineáris-hányados leképezés,*

amelyekre az teljesül, hogy ha $\mathbf{W}$ *vektortér és* $\boldsymbol{Q} : \mathbf{V} \times (\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbf{W}$ *lineáris-hányados leképezés, akkor létezik egyetlen olyan* $\boldsymbol{L} : \mathbf{Z} \to \mathbf{W}$ *lineáris leképezés, hogy*

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{q}.$$

Állítás *A* $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{q})$ *pár akkor és csak akkor a* $\mathbf{V}$*-nek* $\mathbf{A}$*-val vett tenzorhányadosa, ha*

(i) $\mathbf{Z} = \mathrm{Ran}\boldsymbol{q}$,
(ii) $\boldsymbol{q}(\cdot, \alpha)$ *injekció minden* $\alpha \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ *esetén.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy (i) és (ii) teljesül. Ekkor minden $\boldsymbol{Q}$ lineáris-hányados leképezésre $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})) := \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}, \boldsymbol{a} \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\})$ a $\mathbf{Z}$-n jól definiált lineáris leképezés, és az egyetlen olyan, hogy $\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}$.

$\boldsymbol{L}$ jól definiált: tegyük fel, hogy $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b})$. Ekkor a 3.5. jelölésével

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{q}\left(\boldsymbol{y}, \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\right) = \boldsymbol{q}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}\right),$$

amiből (ii) miatt $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{y}$, és ezért $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{Q}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}\right) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b})$.

$\boldsymbol{L}$ lineáris:

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{q}\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}\right) + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{q}\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}\right),$$

és ugyanilyen egyenlőségek igazak $\boldsymbol{Q}$-re is, tehát $\boldsymbol{L}$ összeget összegbe visz; még egyszerűbb látni azt, hogy számszorost számszorosba visz. (A fenti formulában $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ "nevező", az átalakítás nem más, mint közös nevezőre hozás.)

Tegyük most fel, hogy (i) nem teljesül. Ekkor, ha létezik is $\boldsymbol{L}$ lineáris úgy, hogy $\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}$, az nem egyértelmű: $\mathrm{Ran}\boldsymbol{q}$ egy kiegészítőjén akárhogy lehet definiálva.

Ha viszont (ii) nem teljesül, akkor a 26.1. végén adott lineáris-hányados leképezés, amely az első változójában injektív, nem faktorizálható $\boldsymbol{q}$-n keresztül.

Megjegyezzük, hogy (i) miatt $\boldsymbol{q}$ az első változójában szürjektív is, tehát $\boldsymbol{q}$ az első változójában bijektív.

26.3. Ugyanúgy, mint tenzorszorzatok esetén, megmutathatjuk, hogy a tenzorhányados egyetlen izomorfizmus erejéig egyértelmű, ezért "a" tenzorhányadosról szoktunk beszélni, és a definícióban szereplő $\mathbf{Z}$-t $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}$-val, a $\boldsymbol{q}$ leképezést pedig $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \mapsto \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}$ módon jelöljük.

Ha tehát $\boldsymbol{Q} : \mathbf{V} \times (\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbf{W}$ lineáris-hányados leképezés, akkor létezik egyetlen olyan $\boldsymbol{L} : \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés, hogy

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{L}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}, \boldsymbol{a} \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}).$$

Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy tenzorhányados létezik.

Legyen $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ és $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$, és definiáljuk az

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} : \mathbf{A} \to \mathbf{V}, \qquad \boldsymbol{b} \mapsto \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}$$

leképezést, amely nyilvánvalóan lineáris.

Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy

$$\mathbf{V} \times (\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathrm{Lin}(\mathbf{A}, \mathbf{V}), \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \to \frac{x}{\boldsymbol{a}}$$

lineáris hányados, amely az első változójában injektív: ha $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Ha $\boldsymbol{T} : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés, akkor véve egy tetszőleges $\boldsymbol{a}$ elemet $\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$-ből, $\boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{T}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}$, tehát a fenti leképezés értékkészlete az egész $\mathrm{Lin}(\mathbf{A}, \mathbf{V})$, így teljesül a 26.2. állítás (i) és (ii) feltétele. Ennek alapján igaz a következő állítás.

Állítás *Ha* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{A}$ *vektortér,* $\dim \mathbf{A} = 1$, *akkor*

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}} \equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{A}, \mathbf{V}), \qquad \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} \equiv \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}.$$

26.4. Állítás *Ha* $\{\boldsymbol{v}_i \mid i \in I\}$ *bázis* $\mathbf{V}$*-ben és* $\boldsymbol{a}$ *bázis* $\mathbf{A}$*-ban – azaz* $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ *–, akkor*

$$\left\{ \frac{\boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{a}} \mid i \in I \right\}$$

bázis $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}$*-ban, következésképpen* $\dim \left(\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}} \right) = \dim \mathbf{V}$.
Továbbá, ha $\mathbf{V}$ *véges dimenziós,* $(\boldsymbol{v}_i \mid i = 1, \dots, N)$ *és* $(\boldsymbol{v}'_i \mid i = 1, \dots, N)$ *azonosan irányított bázisok* $\mathbf{V}$*-ben,* $\boldsymbol{a}$ *és* $\boldsymbol{a}'$ *azonosan irányított bázisok* $\mathbf{A}$*-ban, akkor* $\left(\dfrac{\boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{a}} \mid i = 1, \dots, N \right)$ *és* $\left(\dfrac{v'_i}{\boldsymbol{a}'} \mid i = 1, \dots, N \right)$ *azonosan irányított bázisok* $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}$*-ban; tehát* $\mathbf{V}$ *és* $\mathbf{A}$ *egy irányítása meghatározza a* $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}$ *egy irányítását.*

Bizonyítás A bázisokra és dimenziókra vonatkozó állítás abból következik, hogy $\boldsymbol{I}_\alpha : \mathbf{V} \to \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}$ lineáris bijekció.

Vegyük most az irányított bázisokat. Ekkor $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'} > 0$. Jelölje $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ azt a lineáris bijekciót, amelyet $\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i$ $(i = 1, \dots, N)$ határoz meg. Ekkor a $\dfrac{\boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{a}} \to \dfrac{\boldsymbol{v}'_i}{\boldsymbol{a}'}$

formulával meghatározott $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}} \to \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}$ lineáris bijekció – az előző bekezdésben bevezetett jelöléssel – $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'}\boldsymbol{I}_a\boldsymbol{L}\boldsymbol{I}_a^{-1}$, és ennek a determinánsa a 21. fejezet eredményei alapján $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'}\right)^N \det \boldsymbol{L} > 0$, tehát igaz az állítás.

26.5. Most összegyűjtünk néhány egyszerű, de sokat használt azonosítást tenzorhányadosokra vonatkozóan. Kérjük az olvasót, ellenőrizze, hogy az alább felsorolt azonosítások helytállók (vagyis a formulákkal "természetes" izomorfizmusokat adunk meg).

(i) Mivel $\mathrm{Lin}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{K}$, és $\alpha \in \mathbb{K}$ az α-val való szorzás,

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}} \equiv \mathbb{K},$$

és $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$ az a szám, amellyel $\boldsymbol{a}$-t szorozni kell, hogy $\boldsymbol{b}$-t kapjuk; más szóval a már a 3.5-ben bevezetett jelölés megfelel a tenzorosztásnak.

(ii)

$$\frac{\mathbb{K}}{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A}^\star, \qquad \left(\frac{1}{\boldsymbol{a}} \mid \boldsymbol{b}\right) \equiv \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}.$$

(iii)

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{K}} \equiv \mathbf{V}, \qquad \frac{\boldsymbol{v}}{\alpha} \equiv \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{v}.$$

(iv) A tenzorszorzásra vonatkozó ismereteink szerint $\mathrm{Lin}(\mathbf{A},\mathbf{V}) \equiv \mathbf{V}\otimes\mathbf{A}^\star$, tehát az (ii) figyelembevételével

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{V}\otimes\mathbf{A}^\star \qquad \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}} \equiv \boldsymbol{v}\frac{1}{\boldsymbol{a}}$$

(ne feledjük, egy dimenziós vektortér elemeivel való tenzorszorzásnál elhagyjuk a $\otimes$ jelet).

(v)

$$\frac{\mathbf{V}^\star}{\mathbf{A}^\star} \equiv \left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}\right)^\star, \qquad \left(\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{h}} \,\middle|\, \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}\right) \equiv \frac{(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{a})}.$$

(vi)

$$\frac{\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}}{\mathbf{B}} \equiv \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{AB}}, \qquad \frac{\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{b}} \equiv \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{ab}}.$$

(vii)

$$\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{A}}\otimes\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}} \equiv \frac{\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}}{\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}} \equiv \mathbf{U}\otimes\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}} \equiv \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}}\otimes\mathbf{V},$$

$$\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{a}}\otimes\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{b}} \equiv \frac{\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{ab}} \equiv \boldsymbol{u}\otimes\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{ab}} \equiv \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{ab}}\otimes\boldsymbol{v}.$$

Speciálisan,

$$\mathbf{A}\otimes\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}\equiv\frac{\mathbf{A}\otimes\mathbf{V}}{\mathbf{A}}\equiv\mathbf{V},\qquad \boldsymbol{b}\otimes\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}\equiv\frac{\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}\equiv\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v},$$

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}}\equiv\frac{\mathbb{K}}{\mathbf{A}},\qquad \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'}\equiv\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}'}\frac{1}{\boldsymbol{a}}.$$

(viii)

$$\frac{\mathbf{U}\times\mathbf{V}}{\mathbf{A}}\equiv\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{A}}\times\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}},\qquad \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\boldsymbol{a}}\equiv\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{a}},\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}\right).$$

Figyelemre méltó az utolsó előtti két pont, amelyek szerint a szorzásnak és osztásnak a számok körében megismert számolási szabályai érvényben maradnak az egy dimenziós vektortérrel való tenzoriális szorzásra és osztásra.

26.6. Feladatok

1. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egy dimenziós vektortér. Értelmezzük a

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}\equiv\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right)^{\star}\equiv\frac{\mathbf{A}^{\star}}{\mathbf{B}^{\star}}\equiv\frac{\mathbb{K}}{\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}}$$

azonosításokat!

2. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egy dimenziós vektortér, $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{L}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ lineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy $\dfrac{\boldsymbol{L}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{L}\boldsymbol{b}}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ minden $\boldsymbol{a}\in\mathbf{A}$ és $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{b}\in\mathbf{B}$ esetén.

3. A 26.5. (v) és (iv) azonosítások alapján mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{a}\in\mathbf{A}$, $\{\boldsymbol{v}_i\mid i\in I\}$ a $\mathbf{V}$ bázisa és $\{\boldsymbol{p}_i\mid i\in I\}$ ennek a duálisa, akkor a $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}$-beli $\left\{\dfrac{\boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{a}}\mid i\in I\right\}$ bázis duálisa $\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_i\mid i\in I\}$.

Hasonlókképpen az $\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}_i\mid i\in I\}$ bázis duálisa $\left\{\dfrac{\boldsymbol{p}_i}{\boldsymbol{a}}\mid i\in I\right\}$.

27. Lineáris leképezések tenzorszorzata és -hányadosa

27.1. Legyen $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}'$ és $\mathbf{V}'$ vektortér (azonos test fölött). Ha $\boldsymbol{A}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{U},\mathbf{U}')$ és $\boldsymbol{B}\in\mathrm{Lin}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$, akkor

$$\mathbf{U}\times\mathbf{V}\to\mathbf{U}'\otimes\mathbf{V}',\qquad(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})$$

bilineáris leképezés, tehát a tenzorszorzatok alaptulajdonsága szerint egyértelműen létezik egy $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$-vel jelölt $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}\to\mathbf{U}'\otimes\mathbf{V}'$ lineáris leképezés úgy, hogy

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})\qquad(\boldsymbol{u}\in\mathbf{U},\boldsymbol{v}\in\mathbf{V}).$$

Egyszerű számolással győződhetünk meg arról, hogy igazak az alábbiak.

Állítás *Ha $\boldsymbol{A} : \mathbf{U} \to \mathbf{U}'$, $\boldsymbol{L} : \mathbf{U}' \to \mathbf{U}''$, $\boldsymbol{B} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ és $\boldsymbol{K} : \mathbf{V}' \to \mathbf{V}''$ lineáris leképezések, akkor*

$$(\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{K})(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{LA} \otimes \boldsymbol{KB}),$$

következésképpen, ha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ bijekció, akkor $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ is az, és

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \otimes \boldsymbol{B}^{-1}.$$

27.2. Nyilvánvaló, hogy a

$$\mathrm{Lin}(\mathbf{U}, \mathbf{U}') \times \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}') \to \mathrm{Lin}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}, \mathbf{U}' \otimes \mathbf{V}'), \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \mapsto \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$$

leképezés bilineáris. Megmutatjuk, hogy tenzorszorzás. Legyenek $\boldsymbol{B}_1, \dots, \boldsymbol{B}_n$ lineárisan függetlenek $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$-ben, és $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_n$ olyan elemek $\mathrm{Lin}(\mathbf{U}, \mathbf{U}')$-ben, hogy $\sum\limits_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}_k \otimes \boldsymbol{B}_k = \mathbf{0}$. Ekkor minden $\boldsymbol{u} \in \mathbf{U}$ és $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ esetén $\sum\limits_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$; továbbá az $\mathbf{U}^\star$ minden $\boldsymbol{q}$ elemére és a $\mathbf{V}^\star$ minden $\boldsymbol{p}$ elemére

$$0 = \left(\boldsymbol{q} \,\middle|\, \left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}_k \otimes \boldsymbol{B}_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{u})(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{B}_k \boldsymbol{v}) = \left(\boldsymbol{p} \,\middle|\, \left(\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{u}) \boldsymbol{B}_k\right) \boldsymbol{v}\right),$$

amiből $\sum\limits_{k=1}^{n} (\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{u}) \boldsymbol{B}_k = \mathbf{0}$, és így a $\boldsymbol{B}_k$-k lineáris függetlensége miatt $(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{u}) = 0$ minden $\boldsymbol{q} \in \mathbf{U}^\star$ és $\boldsymbol{u} \in \mathbf{U}$ esetén, amiből $\boldsymbol{A}_k = \mathbf{0}$ $(k = 1, \dots, n)$.

Ez azt jelenti, hogy nem érdemtelenül használtuk a $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ jelet; eredményünket tehát az alábbi állításban foglalhatjuk össze.

Állítás *Legyen $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}'$ és $\mathbf{U}'$ vektortér (azonos test fölött). Ekkor*

$$\mathrm{Lin}(\mathbf{U}, \mathbf{U}') \otimes \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}') \Rrightarrow \mathrm{Lin}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}, \mathbf{U}' \otimes \mathbf{V}'),$$

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) \equiv (\boldsymbol{Au}) \otimes (\boldsymbol{Bv}).$$

Jegyezzük meg, hogy ha a vektorterek véges dimenziósak, akkor $\Rrightarrow$ helyett $\equiv$ áll, hiszen mind a két oldalon azonos dimenziójú vektorterek állnak.

27.3. Legyen $\mathbf{V}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{V}'$ és $\mathbf{A}'$ vektortér, $\dim \mathbf{A} = \dim \mathbf{A}' = 1$. Ha $\boldsymbol{L} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ és $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{F} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{A}, \mathbf{A}')$, akkor

$$\mathbf{V} \times (\mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{A}'}, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \mapsto \frac{\boldsymbol{Lx}}{\boldsymbol{Fa}}$$

lineáris-hányados, tehát egyértelműen létezik egy $\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{F}}$-fel jelölt $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}} \to \frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{A}'}$ lineáris leképezés úgy, hogy

$$\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{F}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right) = \frac{\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{F}\boldsymbol{a}} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}, \boldsymbol{a} \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}).$$

$\mathrm{Lin}(\mathbf{A}, \mathbf{A}')$ egy dimenziós, és könnyű látni, hogy $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{F}) \mapsto \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{F}}$ lineáris hányados leképezés. Az is egyszerű tény hogy tenzorosztás: ha ugyanis $\boldsymbol{L} \neq \mathbf{0}$, akkor $\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{F}} \neq \mathbf{0}$.

A modottak szerint tehát

$$\frac{\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')}{\mathrm{Lin}(\mathbf{A}, \mathbf{A}')} \equiv \mathrm{Lin}\left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}, \frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{A}'}\right).$$

27.4. Különösen sokszor fordulnak elő lineáris leképezések olyan tenzorhányadosai, amelyekben a nevezőben identitás áll. Közelebbről, ha $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés, és $\mathbf{A}$ vektortér, $\dim\mathbf{A} = 1$, akkor

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}} \to \frac{\mathbf{W}}{\mathbf{A}}, \qquad \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} \mapsto \frac{\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}$$

lineáris leképezés, amely az előző jelölésnek megfelelően $\frac{\boldsymbol{L}}{\mathrm{id}_{\mathbf{A}}}$, helyette azonban a továbbiakban egyszerűen $\boldsymbol{L}$-et írunk.

A tenzorosztás felfogható a duálissal való tenzorszorzásnak (lásd 26.5. (iv)), tehát a fentiekkel összhangban, ha $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés, és $\mathbf{A}$ vektortér, $\dim\mathbf{A} = 1$, akkor az

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{V} \to \mathbf{A} \otimes \mathbf{W}, \qquad \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}$$

lineáris leképezés az előző jelöléseink szerint $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \otimes \boldsymbol{L}$, helyette azonban a továbbiakban egyszerűen $\boldsymbol{L}$-et írunk.

Ez a megállapodás helyénvaló abból a szempontból, hogy a lineáris leképezésekre megállapított műveletekkel és függvényekkel összeférhető, azaz például

$$\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \otimes \boldsymbol{L}_1 + \mathrm{id}_{\mathbf{A}} \otimes \boldsymbol{L}_2 = \mathrm{id}_{\mathbf{A}} \otimes (\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2),$$

$$(\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \otimes \boldsymbol{L})^\star = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}^\star \otimes \boldsymbol{L}^\star,$$

és $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ és véges dimenzió esetén

$$\det(\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \otimes \boldsymbol{L}) = \det \boldsymbol{L}, \quad \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \otimes \boldsymbol{L}) = \mathrm{Tr}\boldsymbol{L},$$

tehát nem származhat kétértelműség az egy dimenziós vektorterek identitásának elhagyásából. Az utolsó két egyenlőség abból igazolható, hogy a determináns és a nyom értékét bármely bázisbeli mátrixból kiszámíthatjuk; a 26.6.3 feladat alapján

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \otimes \boldsymbol{L}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\boldsymbol{p}_k}{\boldsymbol{a}} \,\middle|\, \mathrm{id}_{\mathbf{A}} \otimes \boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}_k) \right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\boldsymbol{p}_k}{\boldsymbol{a}} \,\middle|\, \boldsymbol{a}\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}_k \right) = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{p}_k | \boldsymbol{L}\boldsymbol{v}_k) = \\ = \mathrm{Tr}\boldsymbol{L}.$$

Az előzőekhez hasonlóan, ha $\boldsymbol{R} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ bilineáris leképezés, akkor minden $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egy dimenziós vektortér esetén az

$$\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{A}} \times \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}} \to \frac{\mathbf{W}}{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}}, \qquad \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{b}}, \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} \right) \mapsto \frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})}{\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}}$$

és az

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{U}) \times (\mathbf{B} \otimes \mathbf{V}) \to \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{W}, \qquad (\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})$$

bilineáris leképezést is az $\boldsymbol{R}$ betűvel jelöljük.

27.5. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ lineáris leképezésekre $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^\star \supset \boldsymbol{A}^\star \otimes \boldsymbol{B}^\star$ teljesül, és egyenlőség áll fenn, ha a vektorterek véges dimenziósak.

2. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{K}^N \otimes \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}^N$ azonosításban (lásd a 24.13.1. feladatot) $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^N} \otimes \boldsymbol{A} \equiv \overset{N}{\mathsf{X}} \boldsymbol{A}$ minden $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezésre.

3. A $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{V} \otimes \mathbf{A}^\star$ azonosítást használva mutassuk meg, hogy a 27.3. jelöléseivel $\dfrac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{F}} \equiv \boldsymbol{L} \otimes (\boldsymbol{F}^\star)^{-1}$. (Elég a $\mathbf{V} = \mathbb{K}$ esetet venni, és igazolni, hogy $\dfrac{1}{\boldsymbol{F}} \equiv (\boldsymbol{F}^\star)^{-1}$.

4. Igazoljuk, hogy ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{U})$, $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ vektorterek véges dimenziósak, akkor $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B})$.

5. Legyen $\dim\mathbf{U} = M$, $\dim\mathbf{V} = N$, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{U})$, $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. Bizonyítsuk be:

$$\det(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{A})^M (\det \boldsymbol{B})^N.$$

Útmutatás: (i) $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{V}})(\mathrm{id}_{\mathbf{U}} \otimes \boldsymbol{B})$.

(ii) Elég $\mathbf{U} = \mathbb{K}^M$ esetét tekinteni.

(iii) Használjuk a 2. feladat eredményét és a 21.6. állítást.

6. Igazoljuk az előző feladat alapján, hogy ha $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ és $(\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_N)$ a valós $\mathbf{V}$ vektortér azonosan irányított indexezett bázisai, $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_M)$ és $(\boldsymbol{u}'_1, \dots, \boldsymbol{u}'_M)$ a valós $\mathbf{U}$ vektortér azonosan irányított indexezett bázisai, akkor $(\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_k | i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, N)$ és $(\boldsymbol{u}'_i \otimes \boldsymbol{v}'_k | i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, N)$ az $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$-nek azonosan irányított bázisai; következésképpen az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ egy-egy irányítása meghatározza az $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ egy irányítását.

28. Komplexifikáció

28.1. A valós és a komplex vektorterek bizonyos tulajdonságaikban eltérnek egymástól. Láttuk ezt már a bilineáris formáknál, és látni fogjuk a spektrálelméletben is. Mindazonáltal szoros kapcsolat van a kétféle vektorterek között. Minden komplex vektortér egyben valós vektortér is. És minden valós vektorteret lényegében egyértelműen kibővíthetünk komplex vektortérré ahhoz hasonlóan, ahogy a valós számokat kibővítjük komplex számokká. A kibővítés sémája a tenzoriális műveletek sémáját követi.

Definíció *Legyen* $\mathbf{V}$ *valós vektortér. A* $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{c})$ *pár a* $\mathbf{V}$ ***komplexifikáltja**, ha*

(i) $\mathbf{Z}$ *komplex vektortér,*

(ii) $\boldsymbol{c} : \mathbf{V} \to \mathbf{Z}$ $\mathbb{R}$*-lineáris leképezés,*

amelyekre az teljesül, hogy ha $\mathbf{W}$ *komplex vektortér és* $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ $\mathbb{R}$*-lineáris leképezés, akkor létezik egyetlen olyan* $\boldsymbol{L} : \mathbf{Z} \to \mathbf{W}$ $\mathbb{C}$*-lineáris leképezés, hogy*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{c}.$$

Állítás *Az előző definíció (i) és (ii) feltételének eleget tevő* $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{c})$ *pár akkor és csak akkor a* $\mathbf{V}$ *komplexifikáltja, ha*

(i) $\mathrm{Ran}\boldsymbol{c}$ *és* $i\mathrm{Ran}\boldsymbol{c}$ *kiegészítő* $\mathbb{R}$*-lineáris alterek,*

(ii) $\boldsymbol{c}$ *injektív.*

Bizonyítás Ha (i) és (ii) teljesül, akkor a $\mathbf{Z}$ minden eleme $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) + i\boldsymbol{c}(\boldsymbol{y})$ alakú, egyértelműen meghatározott $\mathbf{V}$-beli $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ elemekkel. Így könnyű látni, hogy adott $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés esetén

$$\boldsymbol{L}\big(\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) + i\boldsymbol{c}(\boldsymbol{y})\big) := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

jól definiált $\mathbb{C}$-lineáris leképezés, és ez az egyetlen olyan, hogy $\boldsymbol{L} \circ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}$.

Tegyük fel, hogy (i) nem teljesül; ha $\mathrm{Ran}\boldsymbol{c} + i\mathrm{Ran}\boldsymbol{c} \neq \mathbf{Z}$, akkor $\boldsymbol{L}$ a $\mathrm{Ran}\boldsymbol{c} + i\mathrm{Ran}\boldsymbol{c}$ egy kiegészítőjén tetszőlegesen lehet definiálva, tehát $\boldsymbol{L}$, ha létezik is, nem egyértelmű; ha $(\mathrm{Ran}\boldsymbol{c}) \cap (i\mathrm{Ran}\boldsymbol{c}) \neq \{\mathbf{0}\}$, akkor van olyan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$, hogy $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = i\boldsymbol{c}(\boldsymbol{y}) \neq \mathbf{0}$. Létezik olyan $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{Z}$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés, hogy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq i\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, és ehhez nem létezik $\mathbb{C}$-lineáris $\boldsymbol{L}$ a kívánt tulajdonsággal.

Tegyük fel, hogy (ii) nem teljesül. Ekkor van olyan $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, hogy $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = 0$. Egy olyan $\boldsymbol{A}$-hoz, amelyre $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, nem létezik $\mathbb{C}$-lineáris $\boldsymbol{L}$ a kívánt tulajdonsággal.

28.2. Ugyanúgy, mint tenzorszorzatok esetén, beláthatjuk, hogy egy $\mathbf{V}$ valós vektortér komplexifikáltja (egyetlen izomorfizmus erejéig) lényegében egyértelmű, ezért “a” komplexifikáltról beszélünk; szokásosan magát a vektorteret (ami a definícióban $\mathbf{Z}$ volt) nevezzük a $\mathbf{V}$ komplexifikáltjának, és $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$-vel jelöljük, a hozzá tartozó $\mathbb{R}$-lineáris injekciót (ami a definícióban $\boldsymbol{c}$ volt) pedig nem jelöljük, azaz $\mathbf{V}$-t a $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{R}$-lineáris alterének tekintjük, és $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ elemeit egyértelműen $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ alakban állítjuk elő, ahol $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ minden eleme $\lambda\boldsymbol{x}$ alakú, ahol $\lambda \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$.

A

$$\mathbf{V}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{V}_{\mathbb{C}}, \quad \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y} \mapsto (\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y})^* := \boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}$$

konjugált lineáris leképezést **komplex konjugálásnak** nevezzük; nyilvánvalóan igaz, hogy

$$(\lambda\boldsymbol{x})^* = \lambda^*\boldsymbol{x} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}).$$

Az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés komplexifikáltját (ami a definícióban $\boldsymbol{L}$ volt) $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$-vel jelöljük. Tehát

$$\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}),$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}).$$

28.3. Meg kell persze mutatnunk, hogy létezik komplexifikált. Kétféle realizációt is adunk.

(i) Vezessünk be a $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$-n komplex számmal szorzást így:

$$(\alpha + i\beta)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := (\alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{x}) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}).$$

Ezzel és a komponensenkénti összeadással $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ komplex vektortér lesz, és a $\mathbf{V} \to \mathbf{V} \times \mathbf{V}$, $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$ injekcióval a $\mathbf{V}$ komplexifikáltja, azaz a megállapodásunknak megfelelően $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$.

Ezt a komplexifikált **additív** realizációjának hívjuk.

(ii) Tekintsük $\mathbb{C}$-t (két dimenziós) valós vektortérnek, vegyük a $\mathbb{C} \otimes \mathbf{V}$ tenzorszorzatot, és vezessünk be ezen komplex számmal szorzást így:

$$\lambda(\mu \otimes \boldsymbol{x}) := (\lambda\mu) \otimes \boldsymbol{x} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}).$$

Ezzel és a komponensenkénti összeadással $\mathbb{C} \otimes \mathbf{V}$ komplex vektortér lesz, és a $\mathbf{V} \to \mathbb{C} \otimes \mathbf{V}$, $\boldsymbol{x} \mapsto 1 \otimes \boldsymbol{x}$ injekcióval a $\mathbf{V}$ komplexifikáltja, azaz a megállapodásunknak megfelelően $\lambda \otimes \boldsymbol{x} \equiv \lambda\boldsymbol{x}$.

Ezt a komplexifikált **multiplikatív** realizációjának hívjuk.

28.4. (i) A $\mathbf{V}$ valós vektortér $\{\boldsymbol{v}_i \mid i \in I\}$ bázisa bázisa $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$-nek is. Valóban, ha $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y} \in \mathbf{V}_{\mathbb{C}}$, akkor van olyan F véges részhalmaza I-nek, hogy $\boldsymbol{x} = \sum_{k \in F} \alpha_k \boldsymbol{v}_k$ és $\boldsymbol{y} = \sum_{k \in F} \beta_k \boldsymbol{v}_k$, ahol az együtthatók valós számok. Ekkor $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y} = \sum_{k \in F} (\alpha_k + i\beta_k)\boldsymbol{v}_k$. Következésképpen $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ komplex dimenziója megegyezik a $\mathbf{V}$ valós dimenziójával.

(ii) Legyen $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ valós vektortér. Mivel $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}_{\mathbb{C}}$, egy $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés felfogható $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezésnek is, amelynek vehetjük a komplexifikáltját. Tehát a valós vektorterek közötti $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezésnek is értelmezhetjük az $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}} : \mathbf{V}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{W}_{\mathbb{C}}$ komplexifikáltját, amelyre ugyanúgy az igaz, hogy $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

28.5. Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{R}^N$ komplexifikáltja $\mathbb{C}^N$, és egy $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ lineáris leképezés azaz egy $M \times N$-es valós mátrix komplexifikáltja pedig önmaga, vagyis ugyanaz a mátrix mint $M \times N$-es komplex mátrix, amelynek minden tagja valós.

Ha $\mathbf{V}$ valós véges dimenziós vektortér és $\boldsymbol{K} : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^N$ egy koordinátázása, akkor $\boldsymbol{K}_{\mathbb{C}} : \mathbf{V}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^N$ a $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ koordinátázása.

A véges dimenziós valós vektorterek közötti $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés mátrixa a $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ adott koordinátázásában ugyanaz, mint $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$ mátrixa a $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ és $\mathbf{W}_{\mathbb{C}}$ megfelelő koordinátázásában. Valóban, ha $\boldsymbol{K}$ és $\boldsymbol{L}$ a valós koordinátázások, akkor $\boldsymbol{A}$ mátrixa $\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}^{-1}$, a komplexifikáltjának a mátrixa $\boldsymbol{L}_{\mathbb{C}}\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}\boldsymbol{K}_{\mathbb{C}}^{-1} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}^{-1})_{\mathbb{C}}$ (lásd a 28.7.2. feladatot), és egy valós mátrix komplexifikáltja önmaga.

Mivel lineáris leképezés determinánsát és nyomát bármely mátrixából számíthatjuk, igaz a következő:

Állítás *Legyen* $\mathbf{V}$ *véges dimenziós valós vektortér,* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. *Ekkor*
(i) $\det(\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}) = \det \boldsymbol{A}$, *(ii)* $\mathit{Tr}(\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}) = \mathit{Tr}\boldsymbol{A}$.

28.6. Ha $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ valós vektorterek, és $\boldsymbol{R} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ bilineáris leképezés, akkor

$$\mathbf{U}_{\mathbb{C}} \times \mathbf{V}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{W}_{\mathbb{C}},$$

$$(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}) + i\big(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})\big)$$

az $\boldsymbol{R}$ egyetlen $\mathbb{C}$-bilineáris kiterjesztése, és

$$\mathbf{U}_{\mathbb{C}} \times \mathbf{V}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{W}_{\mathbb{C}},$$

$$(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}) - i\big(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})\big)$$

az $\boldsymbol{R}$ egyetlen szeszkilineáris kiterjesztése.

Ezzel összhangban a vektorterek komplexifikáltjának a duálisára és tenzorszorzatára, tenzorhányadosára a következő azonosításokat tehetjük. Megjegyezzük, hogy (ii)-ben és (iii)-ben a bal oldalon komplex tenzoriális műveletek állnak, a jobb oldalon valós tenzoriális műveletek.

(i) $(\mathbf{V}^\star)_{\mathbb{C}} \equiv (\mathbf{V}_{\mathbb{C}})^\star$,

$$(\boldsymbol{p} + i\boldsymbol{q}|\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) \equiv (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{q}|\boldsymbol{y}) + i\big((\boldsymbol{q}|x) + (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y})\big).$$

(ii) $\mathbf{U}_{\mathbb{C}} \otimes \mathbf{V}_{\mathbb{C}} \equiv (\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})_{\mathbb{C}}$,

$$(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) \otimes (\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) \equiv \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{y} + i(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{y}).$$

(iii) $\dfrac{\mathbf{V}_{\mathbb{C}}}{\mathbf{A}_{\mathbb{C}}} \equiv \left(\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{A}}\right)_{\mathbb{C}}, \quad \dfrac{\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}} \equiv \dfrac{(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) \otimes (\boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}.$

28.7. Feladatok

1. Ha $\mathbf{V}$ és $\mathbf{U}$ valós vektorterek, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U})$, és * jelöli a komplex konjugálást mind a két vektortér komplexifikáltján, akkor $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}} \circ {}^* = {}^* \circ \boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$.

2. Mutassuk meg, hogy ha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezések és α valós szám, akkor

(i) $(\alpha\boldsymbol{A})_{\mathbb{C}} = \alpha\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$,

(ii) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{A}_{\mathbb{C}} + \boldsymbol{B}_{\mathbb{C}}$,

(iii) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}\boldsymbol{B}_{\mathbb{C}}$.

3. Értelmezzük a valós vektorterek közötti $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés konjugált lineáris $\mathbf{V}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{W}_{\mathbb{C}}$ kiterjesztését!

4. Jelöljük egy komplex vektortér esetén $\mathbb{R}$ indexszel a komplex vektortérhez tartozó valós vektorteret (úgy, hogy csak a valós számmal való szorzást tekintjük).

(i) Ha $\mathbf{V}$ komplex vektortér, akkor $(\mathbf{V}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \equiv \mathbf{V} \times \mathbf{V}$,

(ii) ha $\mathbf{V}$ valós vektortér, akkor $(\mathbf{V}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \equiv \mathbf{V} \times \mathbf{V}$.

VI. PSZEUDO-EUKLIDESZI VEKTORTEREK

A fizikában használatos legegyszerűbb vektoroknak nagysága is van, és két vektornak egymással bezárt szöge; gondoljunk például a fizikai terünk irányított szakaszaira. Az eddig tárgyalt matematikai struktúrában – vektortérben – azonban nincs benne ez a két fogalom: hossz és bezárt szög. Egy új, úgynevezett euklideszi struktúra bevezetésével jutunk el hozzájuk.

A téridővel kapcsolatos vektoroknak álalában nincs hosszuk, bezárt szögük sem; van viszont egyéb tulajdonságuk, amelyet a relativitáselméletben egy úgynevezett Lorentz-féle (vagy másnéven Minkowski-féle) struktúrával írunk le.

Ezek a pszeudo-euklideszi struktúrák speciális esetei.

29. Pszeudo-euklideszi vektorterek

29.1. Definíció *Egy* $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ *hármast* ***pszeudo-euklideszi vektortérnek*** *hívunk, ha*

(i) $\mathbf{V}$ *véges dimenziós valós vektortér,*
(ii) $\mathbf{B}$ *mértékegyenes,*
(iii) $\boldsymbol{h} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$ *nem elfajuló szimmetrikus bilineáris leképezés.*

Szokás $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$-t az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektorok **$\boldsymbol{h}$-szorzatának** nevezni. Az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektort **$\boldsymbol{h}$-ortogonálisnak** mondjuk, ha $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$. A $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}$ vektor **$\boldsymbol{h}$-izotróp**, ha $\boldsymbol{h}$-ortogonális önmagára, azaz $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.

Matematikakönyvekben mindig azt az esetet veszik, amikor $\mathbf{B} = \mathbb{R}$, vagyis $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$ miatt a pszeudo-euklideszi bilineáris leképezés valós értékű. Azonban fizikai alkalmazásokban euklideszi vektorterek esetén $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$-et az $\boldsymbol{x}$ vektor hosszának négyzeteként értelmezzük, és fizikailag a vektorok hossza nem valós szám: például fizikai terünk két pontja közötti távolság 3km vagy 3m de nem 3. Ezért szükséges, hogy általában ne csak valós értékű pszeudo-euklideszi bilineáris leképezéseket tárgyaljunk.

Egyébként igen könnyen visszavezethetjük az általános esetet arra, amikor a pszeudo-euklideszi bilineáris leképezés valós értékeket vesz fel. A

$$\boldsymbol{h}_{\mathbf{B}} : \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}} \times \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}} \to \mathbb{R}, \qquad \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}, \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}\right) \mapsto \frac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\boldsymbol{ab}}$$

bilineáris leképezés szimmetrikus és nem elfajuló, tehát $\left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}, \mathbb{R}, \boldsymbol{h}_{\mathbf{B}}\right)$ pszeudo-euklideszi vektortér.

Ezzel azt is látjuk, hogy a 18. fejezetben szimmetrikus bilineáris formákra vonatkozó minden állítás értelemeszerűen érvényben marad $\boldsymbol{h}$-ra.

29.2. Állítás *Ha $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ páronként $\boldsymbol{h}$-ortognális nem $\boldsymbol{h}$-izotróp vektorok $\mathbf{V}$-ben, akkor lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$. Ekkor minden $i = 1, \ldots, n$ esetén

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{x}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{h}(x_i, \boldsymbol{x}_k) = \alpha_i \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i),$$

amiből $\alpha_i = 0$. ■

A 18.6. szerint (az előző pont végén tett tett megjegyzésünk értelmében) $\mathbf{V}$-nek van páronként $\boldsymbol{h}$-ortogonális elemekből álló bázisa.

Közelebbről, a $\mathbf{B}$ tetszőleges nem nulla $\boldsymbol{a}$ eleme esetén létezik $\mathbf{V}$-nek **$\boldsymbol{a}$-ra normált $\boldsymbol{h}$-ortogonális** $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_N)$ indexezett bázisa, azaz

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = \mathbf{0} \quad \text{ha } i \neq k,$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = \begin{cases} -\boldsymbol{a}^2 < 0 & \text{ha } i = 1, \ldots, \operatorname{neg}(\boldsymbol{h}), \\ \boldsymbol{a}^2 > 0 & \text{ha } i = \operatorname{neg}(\boldsymbol{h}) + 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Emlékezzünk arra (lásd 24.12.), hogy $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$ természetess irányítással látható el, és így van értelme pozitív és negatív elemeiről beszélni.

Eredményünk azt is mutatja, hogy egy véges dimenziós valós vektortéren igen sokféleképpen lehet pszeudo-euklideszi struktúrát definiálni. Ha $\mathbf{V}$ valós vektortér, $\dim\mathbf{V} = N < \infty$, akkor a $\mathbf{V}$ tetszőleges $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ bázisa és $\mathbf{B}$ egy dimenziós valós vektortér $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ eleme, valamint $1 \leq n \leq N$ esetén

$$(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k) \mapsto \begin{cases} \mathbf{0} & \text{ha } i \neq k, \\ -\boldsymbol{a}^2 & \text{ha } i = k = 1, \ldots, n, \\ \boldsymbol{a}^2 & \text{ha } i = k = n+1, \ldots, N \end{cases}$$

hozzárendelés egyértelműen kiterjeszthető $\boldsymbol{h}$ szimmetrikus bilineáris leképezéssé, és ezzel $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ olyan pszeudo-euklideszi vektortér lesz, amelyre $\operatorname{neg}(\boldsymbol{h}) = n$.

29.3. A pszeudo-euklideszi vektorterek egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy természetes kapcsolatot tudunk megadni $\mathbf{V}$ és $\mathbf{V}^\star$ között a következők szerint.

Állítás *Jelölje a szokásnak megfelelően* $\dfrac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\cdot)}{\boldsymbol{ab}}$ *azt a* $\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ *leképezést, amely* $\boldsymbol{y}$*-hoz* $\dfrac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{ab}}$*-t rendeli. Ekkor a*

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}}\to\mathbf{V}^\star,\qquad \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{ab}}\mapsto\frac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\cdot)}{\boldsymbol{ab}}$$

leképezés lineáris bijekció.

Bizonyítás Ez a leképezés nyilvánvalóan lineáris $\boldsymbol{h}$ bilineritása miatt. Továbbá injektív is, mert $\boldsymbol{h}$ nem elfajuló; ugyanis, ha $\dfrac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\cdot)}{\boldsymbol{ab}}=\mathbf{0}$, azaz $\dfrac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{ab}}=\mathbf{0}$ minden $\boldsymbol{y}\in\mathbf{V}$ esetén, akkor $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ és így $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{ab}}=\mathbf{0}$. Minthogy $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}}$ és $\mathbf{V}^\star$ dimenziója ugyanaz (megegyezik $\mathbf{V}$ dimenziójával), a szóban forgó lineáris leképezés bijekció. ■

Ez a lineáris bijekció annyira természetes, hogy azonosításnak fogadjuk el:

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}}\equiv\mathbf{V}^\star,\qquad \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{ab}}\equiv\frac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\cdot)}{\boldsymbol{ab}}.$$

A mondottakból az is következik, hogy

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}\equiv\left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}\right)^\star,\qquad \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\,\middle|\,\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}\right)\equiv\boldsymbol{h}_{\mathbf{B}}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}},\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}\right).$$

29.4. A fenti azonosításból adódó formulák nagyban egyszerűsödnek, ha bevezetjük a **pontszorzás**-jelölést $\boldsymbol{h}$ helyett, vagyis azt írjuk, hogy

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}:=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\qquad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{V}).$$

A 27.4.-ben mondottak szerint $\boldsymbol{h}$ átvihető akár $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}\times\mathbf{V}\to\mathbf{B}$, akár $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$, akár $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}\times\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}\to\mathbb{R}$ stb. bilineáris leképezésnek, és ha mindet ugyanúgy jelöljük, nevezetesen a pontszorzással, akkor

$$\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}},\quad \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{ab}}\cdot\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{ab}},\quad \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{a}}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{ab}},\quad \text{stb.}$$

Az utolsó formula azt mutatja, hogy megállapodásunk szerint a 29.1-ben bevezetett $\boldsymbol{h}_{\mathbf{B}}$ bilineáris forma helyett is pontszorzást írunk.

A pontszorzás segítségével adhatunk értelmet például annak is, hogy a $\mathbf{V}$ egy $\boldsymbol{x}$ eleme $\boldsymbol{h}$-ortogonális a $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$ egy elemére. Ezzel a megállapodásunkkal $\boldsymbol{h}$-ortogonálist mondunk például $\boldsymbol{h}_{\mathbf{B}}$-ortogonális helyett is. $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$-n az 1-re normált $\boldsymbol{h}$-ortogonális bázist **$\boldsymbol{h}$-ortonormáltnak** mondjuk.

Legyen $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ $\boldsymbol{h}$-ortogonális indexezett bázis $\mathbf{V}$-ben. Ennek duálisa a fenti azonosításban,

$$\left(\frac{\boldsymbol{e}_k}{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_k} \,\middle|\, k = 1, \dots, N\right).$$

Vezessük be az

$$\eta_k := \begin{cases} -1 & \text{ha } k = 1, \dots, \operatorname{neg}(\boldsymbol{h}), \\ 1 & \text{ha } k = \operatorname{neg}(\boldsymbol{h}) + 1, \dots, N \end{cases}$$

jelölést. Ha a $\boldsymbol{h}$-ortogonális bázis $\boldsymbol{a}$-ra normált, akkor a duálisát

$$\left(\frac{\eta_k \boldsymbol{e}_k}{\boldsymbol{a}^2} \,\middle|\, k = 1, \dots, N\right)$$

alakba is írhatjuk.

Most különösen jó szolgálatot tesz a lenn-fenn indexezés, amelyet a 15.-16. fejezetben ismertettünk. Ha bevezetjük az

$$\boldsymbol{e}^k := \eta_k \boldsymbol{e}_k \qquad (k = 1, \dots, N)$$

jelölést, akkor a bázis duálisa

$$\left(\frac{\boldsymbol{e}^k}{\boldsymbol{a}^2} \,\middle|\, k = 1, \dots, N\right)$$

Ezért egy $\boldsymbol{x}$ vektor koordinátái az adott bázisban $\frac{\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}^2}$, tehát

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}^2} \boldsymbol{e}_k = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{n}^k \cdot \boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}_k,$$

ahol $\boldsymbol{n}_k := \frac{\boldsymbol{e}_k}{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{n}^k := \frac{\boldsymbol{e}^k}{\boldsymbol{a}} \in \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$.

Ennek megfelelően egy $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés mátrixa az adott bázisban

$$\left(\frac{\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k}{\boldsymbol{a}^2} \,\middle|\, i, k = 1, \dots, N\right) = (\boldsymbol{n}^i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_k \mid i, k = 1, \dots, N),$$

ahol alkalmaztuk a 27.4-beli megállapodásunkat: $\boldsymbol{A}$-val jelöltük az $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\mathrm{id}_{\mathbf{B}}}$ lineáris leképezést is.

A $\boldsymbol{h}$ bilineáris leképezés mátrixa a $\mathbf{V}$ egy $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N)$ indexezett bázisában és a $\mathbf{B}$-nek egy $\boldsymbol{a}$ bázisában

$$\left(\frac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_k)}{\boldsymbol{a}^2} \;\middle|\; i, k = 1, \dots, N \right).$$

Ha tehát ez a bázis $\boldsymbol{h}$-ortogonális és $\boldsymbol{a}$-ra normált, akkor $\boldsymbol{h}$ mátrixa olyan diagonális mátrix, amelyben az első $\operatorname{neg}(\boldsymbol{h})$ elem negatív, a többi pozitív.

29.5. Legyen N pozitív egész szám és n nemnegatív egész szám, $0 \leq n \leq N$. A

$$\boldsymbol{H}_n : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto -\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k + \sum_{k=n+1}^{N} \xi_k \eta_k$$

leképezés bilineáris, szimmetrikus és nem elfajuló, tehát $(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}, \boldsymbol{H}_n)$ pszeudoeuklideszi vektortér; $\operatorname{neg}\boldsymbol{H}_n = n$. Az $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ standard bázis 1-re normált $\boldsymbol{H}_n$-ortogonális.

Itt vigyáznunk kell egy kicsit: van már korábbról egy $\mathbb{R}^N \equiv (\mathbb{R}^N)^\star$ azonosításunk – nevezzük most azt standardnak –, és van egy másik is, amelyet $\boldsymbol{H}_n$ hoz létre. A lenn-fenn indexezés itt különösen hasznos, ugyanis ezzel megkülönböztethetjük a kétféle azonosítást. A standard azonosításban a standard bázis duálisa önmaga, az itteni azonosításban viszont a standard bázis duálisa

$$(\boldsymbol{e}^k := \eta_k \boldsymbol{e}_k \mid k = 1, \dots, N).$$

Az $\mathbb{R}^N$ elemeit felső indexekkel jelöljük, $\boldsymbol{\xi} = (\xi^k \mid k = 1, \dots, N) \in \mathbb{R}^N$, az $(\mathbb{R}^N)^\star$ elemeit alsó indexekkel, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_k \mid k = 1, \dots, N) \in (\mathbb{R}^N)^\star$, és $(\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{N} \pi_k \xi^k$.

Az azonosítást végezzük egyszerűen úgy, hogy áthelyezzük az indexet felülről alulra. Tehát a $\boldsymbol{\xi}$ vektornak megfelelő kovektort jelölje $(\xi_k \mid k = 1, \dots, N)$. Ezzel

– a standard azonosításban

$$\xi_k = \xi^k \qquad (k = 1, \dots, N),$$

– a $\boldsymbol{H}_n$ meghatározta azonosításban

$$\xi_k = \begin{cases} -\xi^k & \text{ha } k = 1, \dots, n, \\ \ \ \xi_k & \text{ha } k = n+1, \dots, N. \end{cases}$$

A formulákat könnyen kezelhetővé írhatjuk át a

$$h_{ik} := h^{ik} := \eta_k \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, \dots, N)$$

bevezetésével:

$$\xi^k = \sum_{i=1}^{N} h^{ik}\xi_k, \qquad \xi_k = \sum_{i=1}^{N} h_{ik}\xi^k \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

ami még egyszerűbbé válik az Einstein-féle összegzési szabállyal: a szumma-jelet elhagyjuk, az ellentétes helyzetben levő azonos indexekre összegezni kell 1-től N-ig:

$$\xi^k = h^{ik}\xi_k, \qquad \xi_k = h_{ik}\xi^k \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

Így tehát

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} := \boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \xi_k \eta^k = h_{ik}\xi^i\eta^k.$$

29.6. Definíció *Legyen* $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ *és* $(\mathbf{V}', \mathbf{B}', \boldsymbol{h}')$ *pszeudo-euklideszi vektortér. Egy* $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *lineáris leképezést* ***homotetikus*** $\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}'$***-ortogonálisnak*** *mondunk, ha van* $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a} \in \mathbf{B}$, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a}' \in \mathbf{B}$ *úgy, hogy*

$$\frac{\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{Lx}, \boldsymbol{Ly})}{(\boldsymbol{a}')^2} = \frac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\boldsymbol{a}^2} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V})$$

(itt most időlegesen visszatérünk a pontszorzás helyett a $\boldsymbol{h}$ *és* $\boldsymbol{h}'$ *kiírására).*

1. Állítás *Legyen* $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *homotetikus* $\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}'$*-ortogonális leképezés. Ekkor*

(i) sign$\big(\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{Lx}, \boldsymbol{Ly})\big) =$ sign$\big(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\big)$ *minden* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ *esetén,*
(ii) $\boldsymbol{L}$ *a* $\boldsymbol{h}$*-ortogonális vektorokat* $\boldsymbol{h}'$*-ortogonális vektorokba képezi,*
(iii) $\boldsymbol{L}$ *injektív,*
(iv) $\dim\mathbf{V} \leq \dim\mathbf{V}'$ *és* $\mathrm{neg}(\boldsymbol{h}) \leq \mathrm{neg}(\boldsymbol{h}')$, *valamint* $\dim\mathbf{V} - \mathrm{neg}(\boldsymbol{h}) \leq \dim\mathbf{V}' - \mathrm{neg}(\boldsymbol{h}')$.

Bizonyítás Az (i) és (ii) nyilvánvaló a definícióból, és ezekből azonnal adódik (iv) is; az injektivitás 29.2-ből és abból következik, hogy egy $\boldsymbol{h}$-ortogonális bázis képe olyan $\boldsymbol{h}'$-ortogonális vektorokból áll, amelyek között nincs $\boldsymbol{h}'$-izotróp vektor.

2. Állítás *Legyen* $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ *és* $(\mathbf{V}', \mathbf{B}', \boldsymbol{h}')$ *pszeudo-euklideszi vektortér. Akkor és csak akkor létezik* $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *homotetikus* $\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}'$*-ortogonális leképezés, ha* $\dim\mathbf{V} \leq \dim\mathbf{V}'$ *és* $\mathrm{neg}(\boldsymbol{h}) \leq \mathrm{neg}(\boldsymbol{h}')$, *valamint* $\dim\mathbf{V} - \mathrm{neg}(\boldsymbol{h}) \leq \dim\mathbf{V}' - \mathrm{neg}(\boldsymbol{h}')$.

Bizonyítás Azt már láttuk, ha létezik ilyen leképezés, akkor igazak az egyenlőtlenségek. Tegyük fel, hogy fennállnak az egyenlőtlenségek. Legyen $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_N)$ a $\mathbf{V}$-ben $\boldsymbol{a}$-ra normált $\boldsymbol{h}$-ortogonális bázis, $(\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_{N'})$ a $\mathbf{V}'$-ben $\boldsymbol{a}'$-re normált

$\boldsymbol{h}'$-ortogonális bázis, mindkettő a szokásos rendezéssel az előjelek szerint. Ekkor az

$$\boldsymbol{e}_i \mapsto \begin{cases} \boldsymbol{e}'_i & \text{ha } i = 1, \dots, \operatorname{neg}(\boldsymbol{h}), \\ \boldsymbol{e}'_{N'-i} & \text{ha } i = \operatorname{neg}(\boldsymbol{h}) + 1, \dots, N \end{cases}$$

formulával meghatározott lineáris leképezés $\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}'$-ortogonális.

29.7. Az előzőek szerint pontosan akkor létezik homotetikus $\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}'$-ortogonális bijekció a két pszeudo-euklideszi vektortér között, ha $\operatorname{neg}(\boldsymbol{h}) = \operatorname{neg}(\boldsymbol{h}')$ és $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{V}'$.

Az ilyen **izomorf** pszeudo-euklideszi vektorterek "ugyanolyanok", "azonos szerkezetűek". Például $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ és $\left(\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}, \mathbb{R}, \boldsymbol{h}_{\mathbf{B}}\right)$ izomorfak.

Az N dimenziós $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ pszeudo-euklideszi vektortér izomorf $(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}, \boldsymbol{H}_{\operatorname{neg}(\boldsymbol{h})})$-val: ha $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ a $\mathbf{V}$-nek $\boldsymbol{a}$-ra normált indexezett $\boldsymbol{h}$-ortogonális bázisa, akkor az

$$\boldsymbol{e}_k \mapsto (\mathbb{R}^N \ k\text{-adik standard bázisvektora}) \qquad (k = 1, \dots, N)$$

formulával meghatározott

$$\mathbf{V} \to \mathbb{R}^N, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \left(\frac{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_k} \,\middle|\, k = 1, \dots, N \right)$$

lineáris leképezés homotetikus $\boldsymbol{h} - \boldsymbol{H}_{\operatorname{neg}(\boldsymbol{h})}$-ortogonális bijekció.,

Pszeudo-euklideszi vektortereket, hacsak valami egyéb miatt nem döntünk másképp, mindig ilyen leképezéssel koordinátázunk.

29.8. A $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ pszeudo-euklideszi vektortér esetén értelmezhetjük a **$\boldsymbol{h}$-ortogonális** leképezéseket, mint azokat a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezéseket, amelyekre

$$\boldsymbol{Lx} \cdot \boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}).$$

Ezek speciális homotetikus $\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}$-ortogonális leképezések.

A $\boldsymbol{h}$-ortogonális leképezések összességét $O(\boldsymbol{h})$-val jelöljük.

A most következő tény – megfelelő átfogalmazással – homotetikus $\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}'$-ortogonális leképezésekre is igaz, de a későbbiekben csak az alábbi speciális esetet használjuk, ezért a jobb áttekinthetőség kedvéért csak ezt fogalmazzuk meg.

Állítás *Az $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés akkor és csak akkor $\boldsymbol{h}$-ortogonális, ha*

$$\boldsymbol{Lx} \cdot \boldsymbol{Lx} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}).$$

Bizonyítás A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Tegyük föl, hogy a fenti egyenlőség teljesül. Ekkor minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$, amiből a bilinearitás és ismét csak a fenti egyenlőség miatt

$$\boldsymbol{Lx} \cdot \boldsymbol{Ly} + \boldsymbol{Ly} \cdot \boldsymbol{Lx} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$$

adódik; ezután már csak a szimmetrikusságot kell felhasználnunk, hogy megkapjuk a kívánt $\boldsymbol{Lx}\cdot\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ egyenlőséget.

29.9. Állítás *Ha $\boldsymbol{L}\in O(\boldsymbol{h})$, akkor $|\det\boldsymbol{L}|=1$.*

Bizonyítás Legyen $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_N$ az $\boldsymbol{a}$-ra normált $\boldsymbol{h}$-ortogonális bázis. Ekkor a 29.4-beli azonosítás, a 20.4. $(*)$ összefüggés, valamint a 21.3-ban mondottak szerint

$$\begin{aligned}1=&\left(\bigwedge_{k=1}^{N}\frac{\eta_k\boldsymbol{e}_k}{\boldsymbol{a}^2}\right)(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_N)=\left(\bigwedge_{k=1}^{N}\frac{\eta_k\boldsymbol{Le}_k}{\boldsymbol{a}^2}\right)(\boldsymbol{Le}_1,\dots,\boldsymbol{Le}_N)=\\=&(\det\boldsymbol{L})^2\left(\bigwedge_{k=1}^{N}\frac{\eta_k\boldsymbol{e}_k}{\boldsymbol{a}^2}\right)(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_N)=(\det\boldsymbol{L})^2.\end{aligned}$$

29.10. Az előzőből a következő fontos eredményt származtathatjuk, amelynek a jelentőségét később látjuk meg.

Állítás *Legyenek $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_N)$ és $(\boldsymbol{e}'_1,\dots,\boldsymbol{e}'_N)$ az $\boldsymbol{a}$-ra illetve az $\boldsymbol{a}'$-re normált azonos irányítású indexezett $\boldsymbol{h}$-ortogonális bázisok $\mathbf{V}$-ben. Ha $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{a}'$ is azonos irányításúak (azaz $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'}>0$), akkor*

$$\bigwedge_{k=1}^{N}\frac{\boldsymbol{e}_k}{\boldsymbol{a}}=\bigwedge_{k=1}^{N}\frac{\boldsymbol{e}'_k}{\boldsymbol{a}'}.$$

Bizonyítás Az $\boldsymbol{Le}_k:=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'}\boldsymbol{e}'_k$ $(k=1,\dots,N)$ formulával $\boldsymbol{h}$-ortogonális leképezést határozunk meg, és $\det\boldsymbol{L}=1$, mert a bázisok azonos irányításúak és $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'}>0$. Ezért

$$\bigwedge_{k=1}^{N}\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'}\boldsymbol{e}'_k=\bigwedge_{k=1}^{N}\boldsymbol{Le}_k=(\det\boldsymbol{L})\bigwedge_{k=1}^{N}\boldsymbol{e}_k,$$

amiből közvetlenül adódik a kívánt egyenlőség.

29.11. Feladatok

1. Legyen $(\mathbf{V},\mathbf{B},\boldsymbol{h})$ pszeudo-euklideszi vektortér és $\emptyset\neq H\subset\mathbf{V}$,

$$H^\bullet:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{V}\mid\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\boldsymbol{y}\in H\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy
(i) $H^\bullet$ lineáris altér $\mathbf{V}$-ben, (ii) $(H^\bullet)^\bullet=\mathrm{Span}H$, (iii) $H^\bullet=(\mathrm{Span}H)^\bullet$,
(iv) ha $\mathbf{M}$ lineáris altér $\mathbf{V}$-ben, akkor $\dim M^\bullet=\mathrm{codim}\mathbf{M}$.
Mikor igaz, hogy $\mathbf{M}$ és $\mathbf{M}^\bullet$ kiegészítő alterek? Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor H egy elemű halmaz.

Vessük össze ereményünket a 12.7.8. feladattal a 29.3-beli azonosítás szerint!

2. Adjunk meg $\boldsymbol{R}^2$-ben a standard bázistól különböző $\boldsymbol{H}_0$-ortogonális és $\boldsymbol{H}_1$-ortogonális bázist!

3. Igazoljuk, hogy ha az $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ leképezés $\boldsymbol{h}$-ortogonális és α nem nulla valós szám, akkor $\alpha\boldsymbol{L}$ homotetikus $\boldsymbol{h}-\boldsymbol{h}$-ortogonális. Viszont, ha $\boldsymbol{L}$ homotetikus $\boldsymbol{h}-\boldsymbol{h}$-ortogonális leképezés, akkor van olyan $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, hogy $\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{L}$ $\boldsymbol{h}$-ortogonálils.

4. Mutassuk meg, hogy két $\boldsymbol{h}$-ortogonális leképezés szorzata (kompozíciója) is $\boldsymbol{h}$-ortogonális.

5. Ha $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ páronként ortogonális nem $\boldsymbol{h}$-izotróp vektorok a $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ pszeudo-euklideszi vektortérben. akkor az alábbi állítások egyenértékűek:

(i) $n = \dim\mathbf{V}$ (vagyis a vektorrendszer bázis),

(ii) ha $\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ $(k = 1, \dots, n)$, akkor $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

(iii) minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_k},$$

(iv) minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{e}_k)}{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_k},$$

(v) minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_k)}{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_k}.$$

6. Legyenek $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ páronként ortogonális nem $\boldsymbol{h}$-izotróp vektorok a $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ pszeudo-euklideszi vektortérben. Igazoljuk, ha $n < \dim\mathbf{V}$, ez a vektorrendszer kiegészíthető $\boldsymbol{h}$-ortogonális bázissá. (Útmutatás: $\boldsymbol{h}$ leszűkítése az $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{V} \mid \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, k = 1, \dots, n\}$ altérre pszeudo-euklideszi bilineáris leképezés.)

30. Pszeudo-euklideszi vektortér tenzorai

Ebben a fejezetben $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ adott pszeudo-euklideszi vektorteret jelöl.

30.1. A 27.4. szerint a

$$\mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \equiv \mathrm{Lin}\left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}\right), \quad \boldsymbol{A} \equiv \frac{\boldsymbol{A}}{\mathrm{id}_{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}}$$

azonosítással élünk; a pszeudo-euklideszi vektorterekre vonatkozó $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}} \equiv \mathbf{V}^\star$ azonosítással együtt tehát egy $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \equiv \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star)$ azonosításunk van.

Emiatt a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$, a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ és a $\mathbf{V}^\star \to \mathbf{V}^\star$ lineáris leképezések között az eddigieknél szélesebb körű kapcsolatokat tudunk felállítani. Például, ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ és $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\star)$, akkor mindeképpen értelmes a $\boldsymbol{BA} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star \equiv \mathbf{V} \to \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}}$ szorzat, most viszont értelmet adhatunk a másik sorrendű szorzatnak is: $\boldsymbol{AB} : \mathbf{V} \to \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}}$.

A legfontosabb az, hogy egy $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ transzponáltját, amely a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star)$ eleme, ebben az azonosításban ismét $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezésnek foghatjuk fel. Ezt az azonosítást azonban bizonyos félreértések elkerülése végett nem tesszük meg, azaz jelölésben megkülönböztetjük egymástól

– az $\boldsymbol{A}^\star : \mathbf{V}^\star \to \mathbf{V}^\star$ transzponáltat és

– az $\boldsymbol{A}^* := \mathrm{id}_{\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}} \otimes \boldsymbol{A}^\star : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ úgynevezett ***h*-adjungáltat**.

A jelölések persze hasonlók, ami arra is utal, hogy ha valaki mégis ragaszkodik az azonosításhoz, akkor a kétféle csillag között nem tesz különbséget.

A $\boldsymbol{h}$-adjungáltat az

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V})$$

egyenlőség jellemzi.

A transzponáltra vonatkozó ismereteink és 27.4. alapján megállapíthatjuk, hogy minden $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*, \quad (\alpha\boldsymbol{A})^* = \alpha\boldsymbol{A}^*, \quad (\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*,$$

$$\det(\boldsymbol{A}^*) = \det\boldsymbol{A}, \qquad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^*) = \mathrm{Tr}\boldsymbol{A},$$

és ha $\boldsymbol{A}$ bijekció, akkor $\boldsymbol{A}^*$ is az, és

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*.$$

30.2. Vegyük most az $(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}, \boldsymbol{H}_n)$ pszeudo-euklideszi vektorteret és legyen $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris leképezés (mátrix), $\boldsymbol{A} = (\alpha^i{}_k \mid i, k = 1, \dots, N)$. Ekkor a 29.5. jelöléseivel

$$\boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{A\eta}) = \xi_i\alpha^i{}_k\eta^k = \xi^j h_{ji}\alpha^i{}_k h^{kl}\eta_l$$

és

$$\boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\alpha^*)^l{}_j\xi^j\eta_l,$$

amiből megállapíthatjuk, hogy

$$(\alpha^*)^l_j = h_{ji}\alpha^i{}_k h^{kl} = h^{lk}\alpha^i{}_k h_{ij},$$

amit szemléletesen így írhatunk:

$$\boldsymbol{A}^* = \hat{\boldsymbol{H}}_n \boldsymbol{A}^\star \hat{\boldsymbol{H}}_n,$$

ahol $\boldsymbol{A}^\star$ a mátrix transzponáltja, $\hat{\boldsymbol{H}}_n$ az a diagonális mátrix, amelynek az első n tagja -1, a többi 1. Ez az egyenlőség a fő oka annak, hogy a transzponáltat nem azonosítottuk a $\boldsymbol{h}$-adjungálttal.

30.3. Állítás *$\boldsymbol{L} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ akkor és csak akkor $\boldsymbol{h}$-ortogonális, ha $\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}^{-1}$.*

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{L} \in O(\boldsymbol{h})$, akkor $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L}\boldsymbol{y})$ minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén, ami a $\boldsymbol{h}$ nemdegeneráltsága miatt azt jelenti, hogy $\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$, azaz (mivel véges dimenziós vektortérről van szó) $\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}^{-1}$.

Ha viszont $\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}^{-1}$ azaz $\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$, akkor minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ vektorra $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{L}\boldsymbol{y})$, azaz $\boldsymbol{L} \in O(\boldsymbol{h})$.

30.4. A 14.5-ben értelmeztük a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ leképezések szimmetrikus illetve antiszimmetrikus voltát, és felhívtuk a figyelmet, hogy általában $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezésre ezek a fogalmak nem értelmesek. Pszeudo-euklideszi vektortérben azonban igen.

Definíció *Az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezést* ***$\boldsymbol{h}$-szimmetrikusnak*** *illetve* ***$\boldsymbol{h}$-antiszimmetrikusnak*** *hívjuk, ha*

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}, \quad \textit{illetve} \quad \boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}.$$

A fenti egyenlőségek egyenértékűek azzal, hogy minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}, \quad \text{illetve} \quad \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x}.$$

A $\boldsymbol{h}$-szimmetrikus illetve a $\boldsymbol{h}$-antiszimmetrikus leképezések összességét $S(\boldsymbol{h})$-val illetve $A(\boldsymbol{h})$-val jelöljük.

A lineáris leképezések szorzatának $\boldsymbol{h}$-adjungáltjára vonatkozó összefüggésünk alapján nyilvánvalóan igaz a következő.

Állítás *Ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ $\boldsymbol{h}$-szimmetrikus illetve $\boldsymbol{h}$-antiszimmetrikus és $\boldsymbol{L} \in O(\boldsymbol{h})$, akkor $\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{-1}$ is $\boldsymbol{h}$-szimmetrikus illetve $\boldsymbol{h}$-antiszimmetrikus.*

30.5. Mivel $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^*) = \mathrm{Tr}\boldsymbol{A}$, azonnal adódik, hogy

$$\mathrm{Tr}\boldsymbol{A} = 0 \qquad (\boldsymbol{A} \in A(\boldsymbol{h})).$$

Ennél egy kicsit többet is mondhatunk: ha $\boldsymbol{A} \in A(\boldsymbol{h})$, akkor minden $\boldsymbol{x}$-re $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, tehát a 29.4-ben mondottak szerint az $\boldsymbol{A}$ bármely mátrixának diagonális elemei nullák (amelyek összege a nyom). Meg is fordíthatjuk: ha $\boldsymbol{A}$ bármely mátrixának a diagonális elemei nullák, akkor $\boldsymbol{A} \in A(\boldsymbol{h})$, ami az alábbi állításból azonnal következik.

Állítás *Ha* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ *és* $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ *minden* $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ *esetén, akkor* $\boldsymbol{A} \in A(\boldsymbol{h})$.

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ a $\mathbf{V}$ tetszőleges eleme, akkor $\mathbf{0} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})$, amiből $\mathbf{0} = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$ következik, és ezt kellett belátnunk.

30.6. Egyszerű tény, hogy $S(\boldsymbol{h})$ és $A(\boldsymbol{h})$ a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$-nek alterei és egymás kiegészítői: a közös részük a nulla, és minden $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ a $\boldsymbol{h}$-szimmetrikus $\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*}{2}$ és a $\boldsymbol{h}$-antiszimmetrikus $\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*}{2}$ összege.

Vegyük a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \equiv \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^\star \equiv \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}} \otimes \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$ azonositásokat; könnyű látni, hogy ez a szóban forgó vektorterek altereire az $S(\boldsymbol{h}) \equiv \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}} \vee \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$ és az $A(\boldsymbol{h}) \equiv \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}} \wedge \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$ azonosításokat szolgáltatja. Következésképen, ha $\dim\mathbf{V} = N$, akkor

$$\dim S(\boldsymbol{h}) = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \dim A(\boldsymbol{h}) = \frac{N(N-1)}{2}.$$

Ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ és $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$, akkor

$$\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \quad \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{y}),$$

és

$$\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{x} : \mathbf{V}^\star \to \mathbf{V}^\star \equiv \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \quad \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y});$$

ez utóbbinál $\boldsymbol{p} \in \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}$ és $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \in \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$, tehát a szorzatuk valóban a $\mathbf{V}$ eleme.

Ennek megfelelően könnyű látni, hogy $(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p})^* = \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{x}$, így lesz értelmes a 18.4-gyel összhangban az

$$\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{p} := \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{p} := \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{x}$$

jelölés.

A $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ egy rangú lineáris leképezéseket leginkább $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$ elemeinek tenzorszorzataként állítjuk elő. A tárgyalt azonosításoknak megfelelően, ha $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$, akkor

$$\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{m}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}),$$

és

$$(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n})^* = \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{m},$$

tehát
$$\boldsymbol{m} \vee \boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{m}, \quad \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{m}.$$

30.7. A 24.13.5. feladatnak megfelelően $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})^\star$ azonosítható $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star)$-gal, ami viszont most azonosítható $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$-vel. Erről beszélünk most egy kicsit bővebben és egy kicsit más oldalról.

Állítás *A*

$$\mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \times \mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \to \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \mapsto \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} := \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B})$$

leképezés nem elfajuló szimmetrikus bilineáris forma, amely pontosan akkor pozitív definit, ha $\boldsymbol{h}$ pozitív definit (azaz $\mathrm{neg}(\boldsymbol{h}) = 0$*).*
Továbbá, ha $\boldsymbol{L} \in O(\boldsymbol{h})$, akkor

$$(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{-1}) : (\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}^{-1}) = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}.$$

Bizonyítás A $:$ leképezés a nyom és a $\boldsymbol{h}$-adjungálás tulajdonságaiból nyilvánvalóan bilineáris és szimmetrikus.

Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = 0$ minden $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ esetén, azaz a 24.9-nek és a 29.4-nek megfelelően

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \boldsymbol{n}_i \cdot (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}_i) = \sum_{i=1}^{N} \eta_i (\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_i) \cdot (\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}_i)$$

a $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$ minden $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_N$ $\boldsymbol{h}$-ortonormált bázisa és minden $\boldsymbol{A}$ esetén. Véve az $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{n}_j \otimes \boldsymbol{n}_k$ $(j, k = 1, \ldots, N)$ leképezéseket arra jutunk, hogy $\boldsymbol{n}_j \cdot (\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}_k) = 0$ minden j-re és k-ra, amiből $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ következik; tehát a bilineáris leképezés nem elfajuló.

Mivel $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} = \sum\limits_{i=1}^{N} \eta_i (\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_i) \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_i)$, ha $\boldsymbol{h}$ pozitiv definit – azaz $\eta_i = 1$ és $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_i) \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_i) \geq 0$ minden i-re –, akkor $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} \geq 0$, és ha $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} = 0$, akkor $\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{0}$ minden i-re, tehát $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$; vagyis ekkor a $:$ forma valóban pozitív definit.

Viszont ha $\boldsymbol{h}$ nem pozitív definit, akkor könnyen találunk olyan $\boldsymbol{A}$-t, amelyre $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} < 0$.

Végül, ha $\boldsymbol{L} \in O(\boldsymbol{h})$, akkor $\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}^{-1}$, és a nyom alatt a lineáris leképezések sorrendje felcserélhető, tehát

$$(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{-1}) : (\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}^{-1}) = \mathrm{Tr}((\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{-1})^*\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}^{-1}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}^{-1}) =$$
$$= \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}. \blacksquare$$

Eredményünk alapján azt is mondhatjuk, hogy $(\mathrm{Lin}(\mathbf{V}), \mathbb{R}, :)$ pszeudo-euklideszi vektortér. Ezért igaz rá, hogy a $\;:\;$ forma által $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})^\star$ azonosítható $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$-vel; erről volt szó ennek a pontnak az elején.

Ha $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \in \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$, akkor

$$(\boldsymbol{m}_1 \otimes \boldsymbol{n}_1) : (\boldsymbol{m}_2 \otimes \boldsymbol{n}_2) = (\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2)(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2),$$

$$(\boldsymbol{m}_1 \wedge \boldsymbol{n}_1) : (\boldsymbol{m}_2 \wedge \boldsymbol{n}_2) = 2\big[(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2)(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2) + (\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{m}_2 \cdot \boldsymbol{n}_1)\big],$$

$$(\boldsymbol{m}_1 \vee \boldsymbol{n}_1) : (\boldsymbol{m}_2 \vee \boldsymbol{n}_2) = 2\big[(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2)(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2) - (\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{m}_2 \cdot \boldsymbol{n}_1)\big].$$

Ezek a formulák azt is mutatják, hogy ha $\boldsymbol{h}$ indefinit, akkor a $\;:\;$ forma az $S(\boldsymbol{h})$-ra és az $A(\boldsymbol{h})$-ra leszűkítve is indefinit.

30.8. A következő meghatározás akármilyen $\mathbf{V}$ vektortérre értelmes, nem csak pszeudo-euklideszire.

Definíció *Az* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ ***kommutátora***

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] := \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

1. Állítás *A* $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \times \mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ *kommutátor bilineáris, antiszimmetrikus, és teljesíti az úgynevezett* ***Jacobi-azonosságot****:*

$$\big[[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}], \boldsymbol{C}\big] + \big[[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}], \boldsymbol{B}\big] + \big[[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}], \boldsymbol{A}\big] = \mathbf{0}$$

minden $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ *esetén.*

A most következők viszont csak pszeudo-euklideszi vektortérben igazak; az első a $\boldsymbol{h}$-adjungálás tulajdonságaiból következik, a második abból, hogy a nyom alatt a lineáris leképezések sorrendje felcserélhető.

2. Állítás *(i) Ha* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in A(\boldsymbol{h})$, *akkor* $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \in A(\boldsymbol{h})$.
(ii) Minden $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ *esetén*

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] : \boldsymbol{C} = [\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}] : \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] : \boldsymbol{A}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{m}_1 \wedge \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{m}_2 \wedge \boldsymbol{n}_2] = &\\ &= (\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2)\boldsymbol{m}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2 + (\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{m}_2 - \\ &- (\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{m}_1 \wedge \boldsymbol{m}_2 - (\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2)\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2. \qquad (*)\end{aligned}$$

30.9. Legyen most $\mathbf{V}$ és $\mathbf{B}$ irányított. Ekkor 29.10. szerint az egy dimenziós $\bigwedge^N \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$ vektortérnek van egy kitüntetett eleme, amelyet **Levi–Civita-tenzornak** szokás nevezni:

$$\boldsymbol{\epsilon} := \overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \frac{\boldsymbol{e}_k}{\boldsymbol{a}} = \overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_k,$$

ahol $\boldsymbol{a}$ a $\mathbf{B}$ tetszőleges pozitív eleme és $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ a $\mathbf{V}$ tetszőleges pozitívan irányított, $\boldsymbol{a}$-ra normált $\boldsymbol{h}$-ortogonális bázisa, illetve $(\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_N)$ pozitívan irányított $\boldsymbol{h}$-ortonormált bázis $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$-ben.

A Levi–Civita-tenzor hipermátrixa bármely ilyen bázisban

$$\begin{aligned}\epsilon_{i_1 \dots i_N} &:= \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{n}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{n}_{i_N}) = \\ &= (-1)^{\mathrm{neg}(\boldsymbol{h})} \begin{cases} 1 & \text{ha } i_1, \dots, i_N \text{ páros permutáció,} \\ -1 & \text{ha } i_1, \dots, i_N \text{ páratlan permutáció,} \\ 0 & \text{ha } i_1, \dots, i_N \text{ közül kettő egyenlő.} \end{cases}\end{aligned}$$

30.10. Vezessük be az egyszerűség kedvéért a $\mathbf{H} := \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$ jelölést. A 25.2-ben mondottak egy kis módosításával (átszámozásával) és a $\mathbf{H}^\star \equiv \mathbf{H}$ figyelembe vételével a Levi–Civita-tenzor minden $0 \le n \le N$ esetén egy

$$\boldsymbol{j}_n : \overset{n}{\wedge} \mathbf{H} \to \overset{N-n}{\wedge} \mathbf{H}, \quad \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} \boldsymbol{m}_i \mapsto \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{m}_1, \dots, \boldsymbol{m}_n, \cdot, \dots, \cdot)$$

lineáris bijekciót hoz létre, ahol $\overset{0}{\wedge} := \mathbb{R}$ és $\overset{1}{\wedge} := \mathbf{H}$.

Állítás $\boldsymbol{j}_{N-n} = (-1)^{\mathrm{neg}(\boldsymbol{h})}(-1)^{n(N-n)}\boldsymbol{j}_n^{-1} \qquad (n = 0, 1, \dots, N).$

Bizonyítás Legyen $\boldsymbol{n}_1, \dots, n_N$ a $\mathbf{H}$-nak $\boldsymbol{h}$-ortonormált bázisa. Ekkor, ha $\rho \in \mathrm{Perm}_n$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}_n\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_{\rho(k)}\right) &= \left(\overset{N}{\underset{i=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_i\right)(\boldsymbol{n}_{\rho(1)}, \dots, \boldsymbol{n}_{\rho(n)}, \cdot, \dots, \cdot) = \\ &= \left[\sum_{\pi \in \mathrm{Perm}_n} \mathrm{sign}\pi \overset{N}{\underset{i=1}{\otimes}} \boldsymbol{n}_{\pi(i)}\right](\boldsymbol{n}_{\rho(1)}, \dots, \boldsymbol{n}_{\rho(n)}, \cdot, \dots, \cdot) = \\ &= \sum_{\substack{\pi \in \mathrm{Perm}_n \\ \pi(k) = \rho(k) \\ k = 1, \dots, n}} (\mathrm{sign}\pi) z_{\rho,n} \overset{N}{\underset{i=n+1}{\otimes}} \boldsymbol{n}_{\pi(i)},\end{aligned}$$

ahol

$$z_{\rho,n} := \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{n}_{\rho(k)} \cdot \boldsymbol{n}_{\rho(k)} \in \{-1, 1\}.$$

Azok a permutációk, amelyekre összegeznünk kell, $\pi = \sigma\rho$ alakba írhatók, ahol $\sigma(i) = i$ ha $i = 1, \ldots, n$. Az ilyen σ-k azonosíthatók az $\{n+1, \ldots, N\}$ permutációival, tehát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}_n\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_{\rho(k)}\right) = & \sum_{\sigma\in\mathrm{Perm}\{n+1,\ \ldots\ ,N\}} (\mathrm{sign}\sigma)(\mathrm{sign}\rho) z_{\rho,n} \overset{N}{\underset{i=n+1}{\otimes}} \boldsymbol{n}_{\sigma(\rho(i))} = \\ =&(\mathrm{sign}\rho) z_{\rho,n} \overset{N}{\underset{i=n+1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_{\rho(i)} = \\ =&(\mathrm{sign}\rho) z_{\rho,n} \overset{N-n}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_{\rho(\omega(k))},\end{aligned}$$

ahol $\omega \in \mathrm{Perm}_n$ az n-nel való eltolás, azaz

$$\omega(k) := (k+n)|\mathrm{mod}N = \begin{cases} k+n & \text{ha } k+n \leq N, \\ k+n-N & \text{ha } k+n > N. \end{cases}$$

Az előbbi képletünket alkalmazhatjuk n helyébe $N-n$-et írva:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}_{N-n}\left(\boldsymbol{j}_n\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_{\rho(k)}\right)\right) &= (\mathrm{sign}\rho) z_{\rho,n} \boldsymbol{j}_{N-n}\left(\overset{N-n}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_{\rho(\omega(k))}\right) = \\ &= (\mathrm{sign}\rho)(\mathrm{sign}\rho\omega) z_{\rho,n} z_{\rho\omega,N-n} \overset{N}{\underset{i=N-n+1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_{\rho(\omega(k))} = \\ &= (-1)^{n(N-n)}(-1)^{\mathrm{neg}(\boldsymbol{h})} \overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_{\rho(k)}.\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőségnél azt használtuk fel, hogy
– $\mathrm{sign}\omega = (-1)^{n(N-n)}$,
– $i > N-n$, tehát $\omega(i) = i + n - N$,
– $z_{\rho,N-n} = \prod_{k=1}^{N-n} \boldsymbol{n}_{(\rho\omega)(k)} \cdot \boldsymbol{n}_{(\rho\omega)(k)} = \prod_{i=n+1}^{N} \boldsymbol{n}_{\rho(i)} \cdot \boldsymbol{n}_{\rho(i)} = (-1)^{\mathrm{neg}(\boldsymbol{h})} z_{\rho,n}$.

Mivel a $\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_{\rho(k)}$ alakú elemek kifeszítik $\overset{n}{\wedge}\mathbf{H}$-t, beláttuk, hogy $\boldsymbol{j}_{N-n}\boldsymbol{j}_n$ az identitás $(-1)^{\mathrm{neg}(\boldsymbol{h})+n(N-n)}$-szerese, ami a feladatunk volt.

Nézzünk meg néhány speciális esetet: ha $(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_N)$ pozitívan irányított $\boldsymbol{h}$-ortonormált bázis, akkor

$$\boldsymbol{j}_N : \overset{N}{\wedge}\mathbf{H} \to \mathbb{R}, \qquad \overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{m}_k \mapsto \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_N), \qquad \boldsymbol{j}_N(\overset{N}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_k) = 1,$$

$$\boldsymbol{j}_0 : \mathbb{R} \to \overset{N}{\wedge}\mathbf{H}, \qquad \alpha \mapsto (-1)^{\mathrm{neg}(\boldsymbol{h})}\alpha\boldsymbol{\epsilon},$$

$$\boldsymbol{j}_{N-1} : \overset{N-1}{\wedge}\mathbf{H} \to \mathbf{H}, \qquad \overset{N-1}{\underset{k=1}{\wedge}} \boldsymbol{n}_{\rho(k)} \mapsto (\mathrm{sign}\rho)\boldsymbol{n}_{\rho(N)},$$

$$\boldsymbol{j}_1 : \mathbf{H} \to \overset{N-1}{\wedge}\mathbf{H}, \qquad \boldsymbol{m} \mapsto \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{m}, \cdot, \ldots, \cdot).$$

30.11. Feladatok

1. Legyen $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$, $\boldsymbol{L} \in O(\boldsymbol{h})$. Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n})\boldsymbol{L}^{-1} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{m}) \otimes (\boldsymbol{L}\boldsymbol{n})$.

2. Legyen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. Mi az $\boldsymbol{AB}$-nek a $\boldsymbol{h}$-szimmetrikus illetve a $\boldsymbol{h}$-antiszimmetrikus része? Mi ez, ha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ is $\boldsymbol{h}$-szimmetrikus illetve $\boldsymbol{h}$-antiszimmetrikus?

3. Bizonyítsuk be, hogy az $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezésre $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^*) = (\mathrm{Ran}\boldsymbol{A})^\bullet$ (lásd a 29.11.1. feladatot).

4. Legyen $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}}$. Jellemezzük azokat a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezéseket, amelyek felcserélhetők (i) $\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n}$-nel, (ii) $\boldsymbol{m} \vee \boldsymbol{n}$-nel, (iii) $\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}$-nel.

31. Euklideszi vekorterek

31.1. A $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ pszeudo-euklideszi vektorteret **euklideszinek** nevezzük, ha $\boldsymbol{h}$ pozitív definit, azaz $\mathrm{neg}(\boldsymbol{h}) = 0$.

A következőkben $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \boldsymbol{b})$-vel jelölünk egy euklideszi vektorteret. A szokásos szóhasználattal élve itt (euklideszi vektorterek esetén) $\boldsymbol{b}$-ortogonális helyett egyszerűen **ortogonálist** vagy **merőlegest** mondunk. Az előző két fejezetben megszokott jelölésnek megfelelően $\boldsymbol{b}$-t itt is pontszorzással helyettesítjük, tehát $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Minden érvényben marad, természetesen, amit az előző két fejezetben mondtunk, amelyek közül az egyik legfontosabb az

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}} \equiv \mathbf{E}^\star$$

azonosítás.

Tudjuk, hogy értelmes a $\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}$ pozitív elemeinek négyzetgyöke, és így értelmezzük az $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$ **hosszát**:

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \in \mathbf{D}_0^+.$$

Egyszerű számolás adja a Pitagorasz-szabályt: ha $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ páronként merőleges vektorok, akkor

$$\left| \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |\boldsymbol{x}_i|^2.$$

A vektorok hosszának alapvető tulajdonságai:

(i) $|\boldsymbol{x}| = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

(ii) $|\alpha\boldsymbol{x}| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$ minden α valós számra és $\boldsymbol{x}$ vektorra,

(iii) $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E}$ esetén, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamos egymással.

Az első a $\boldsymbol{b}$ pozitív definitásából adódik, a második a bilinearitásából, a harmadik pedig, amelyet **háromszög-egyenlőtlenségnek** nevezünk abból, hogy

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + |\boldsymbol{y}|^2 \leq |\boldsymbol{x}|^2 + 2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}|^2 = (|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2,$$

ami a következő pontban tárgyalt Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség alapján igaz.

A 29.4-ben mondottaknak megfelelően a $\boldsymbol{b}$ bilineáris leképezést – a pontszorzást – átvihetjük $\mathbf{E}$-nek egy dimenziós vektortérrel való tenzorszorzatára és tenzorhányadosára. Eszerint van értelme például annak, hogy az $\mathbf{E}$ egy eleme és az $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{D}}$ egy eleme merőleges egymásra. Továbbá a hossz fogalmát is átvihetjük; egy $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{D}}$ elem hossza valós szám, egy $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{D}\otimes\mathbf{D}}$ elem hossza az $\frac{\mathbb{R}}{\mathbf{D}} \equiv \mathbf{D}^\star$ eleme, stb., és ezekre a hosszakra is érvényesek a felsorolt (i)-(iii) tulajdonságok.

31.2. Az euklideszi vektorterek egyik legfontosabb összefüggése az alábbi **Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség**.

Állítás *Az* $\mathbf{E}$ *minden* $\boldsymbol{x}$ *és* $\boldsymbol{y}$ *elemére*

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$$

teljesül, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\boldsymbol{x}$ *és* $\boldsymbol{y}$ *párhuzamosak.*

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ vagy $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$, akkor az egyenlőség nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy egyik sem nulla. Ekkor a pozitív definitás miatt

$$\mathbf{0} \leq \Big| |\boldsymbol{y}|^2\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} \Big|^2 = |\boldsymbol{y}|^4|\boldsymbol{x}|^2 - 2|\boldsymbol{y}|^2(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x})^2 + |\boldsymbol{y}|^2(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x})^2,$$

amiből egyszerű rendezéssel, $|\boldsymbol{y}|^2$-tel való osztás majd gyökvonás után megkapjuk a kívánt eredményt. ■

A Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenséggel bizonyítottuk be az előző pontban a háromszög-egyenlőtlenséget, továbbá emiatt értelmes az $\mathbf{E}$ nem nulla $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ eleme **által bezárt szög**

$$\arg(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \arccos\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|},$$

hiszen az arccos mögött álló mennyiség abszolútértéke nem lehet nagyobb egynél. Két nem nulla vektor akkor és csak akkor merőleges, ha a bezárt szögük $\pi/2$.

31.3. A fizikai terünk irányított szakaszai "szemmel láthatóan" eleget tesznek a háromszög-egyenlőtlenségnek.

Az irányított szakaszok hosszából és a bezárt szögükből – amelyek ugyancsak "kézzelfogható mennyiségek" – szokták származtatni a skalárszorzatukat: az egymással α szöget bezáró $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ irányított szakasz skalárszorzata $|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\alpha$. Ezzel az a baj, hogy a hossz és bezárt szög intuitív és nem matematikai fogalmak, tehát a skalárszorzat ilyen definíciója matematikailag értelmetlen. Ha valamilyen módon matematikai értelmet adunk a vektorok hosszának és bezárt szögüknek, akkor persze helyénvaló a definíció.

Szinte nyilvánvaló azonban, hogy a fordított utat kell járni: matematikai értelmet adni a skalárszorzatnak – ez az euklideszi bilineáris leképezés –, és ebből származtatni a vektorok hosszát és bezárt szögüket.

31.4. Tudjuk a pszeudo-euklideszi vektorterek elméletéből, hogy $\mathbf{E}$-ben mindig létezik páronként merőleges elemekből álló bázis (ortogonális bázis). Ennél most egy kicsit több is mondható.

Állítás *Ha* $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N$ *az* $\mathbf{E}$ *bázisa és* $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a} \in \mathbf{D}$, *akkor van olyan,* $\boldsymbol{a}$*-ra normált* $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N$ *ortogonális bázis, hogy minden* $n = 1, \dots, N$ *esetén* $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\} = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$.

Bizonyítás Rekurzív formulát – az úgynevezett **Gram–Schmidt-ortogonalizációs eljárást** – adunk meg:

$$\boldsymbol{y}_n := \boldsymbol{x}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{x}_n}{\boldsymbol{a}^2} \boldsymbol{e}_i,$$

$$\boldsymbol{e}_n := \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{y}_n}{|\boldsymbol{y}_n|} \qquad (n = 1, \dots, N).$$

A formula helyes, ugyanis $n = 1$ esetén $\boldsymbol{e}_1$ eleget tesz a követelményeknek. Ha feltesszük, hogy $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ is eleget tesz, akkor $\boldsymbol{y}_n \in \mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n\} = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n\}$, és $\boldsymbol{y}_n \neq 0$, hiszen lineárisan független vektorok olyan lineáris kombinációja, hogy legalább egy együttható nem nulla, tehát $|\boldsymbol{y}_n| \neq \mathbf{0}$; így $\boldsymbol{e}_n$ jól definiált, és merőleges $\boldsymbol{e}_i$-re, ha $i = 1, \dots, n-1$. ■

Vegyük észre, hogy általában egy $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ pszeudo-euklideszi vektortérben $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ nem vonja maga után, hogy $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \neq \mathbf{0}$, ezért ott nem működik a fentihez hasonló $\boldsymbol{h}$-ortogonalizációs eljárás.

A Gram–Schmidt-féle eljárásból is következik az az egyébként is ismert tény (lásd a 29.11.6. feladatot), hogy egy ortogonális rendszer kiegészíthető ortogonális bázissá.

31.5. Legyen $H \neq \emptyset$ az $\mathbf{E}$ részhalmaza, és

$$H^{\perp} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{y} \in H\}.$$

Nyilvánvaló, hogy
- $H^{\perp}$ lineáris altér, $H \subset (H^{\perp})^{\perp}$, ezért $\mathrm{Span} H \subset (H^{\perp})^{\perp}$ is teljesül,
- ha $\emptyset \neq G \subset H$, akkor $H^{\perp} \subset G^{\perp}$,

Ezekből $H \subset \mathrm{Span}H$ miatt $(\mathrm{Span}H)^\perp \subset H^\perp$. Ha viszont $\boldsymbol{x}$ merőleges a H minden elemére, akkor merőleges a H elemeiből vett lineáris kombinációkra is, azaz $H^\perp \subset (\mathrm{Span}H)^\perp$, tehát

– $H^\perp = (\mathrm{Span}H)^\perp$.

Állítás *Legyen* $\mathbf{M}$ *lineáris altér* $\mathbf{E}$*-ben.*

(i) $\mathbf{M}^\perp = \{\mathbf{0}\}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{M} = \mathbf{E}$,

(ii) $\mathbf{M}$ *és* $\mathbf{M}^\perp$ *kiegészítő alterek.*

Bizonyítás (i) Világos, hogy $\mathbf{E}^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Ha viszont $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}$, akkor az $\mathbf{M}$-ben van ortogonális bázis, amely kiegészíthető az $\mathbf{E}$ ortogonális bázisává, ami maga után vonja, hogy $\mathbf{M}^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$.

(ii) Ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\perp$, akkor $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, következésképpen $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Ha $\boldsymbol{x} \in (\mathbf{M} + \mathbf{M}^\perp)^\perp$, akkor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\perp$, tehát $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Ezért az (i) pont szerint $\mathbf{M} + \mathbf{M}^\perp = \mathbf{E}$. ■

Eredményünkből és az előtte levő egyszerű tényekből az következik, hogy bármely nem üres H részhalmazra

$$\mathrm{Span}H = (H^\perp)^\perp.$$

Valóban, $\mathrm{Span}H$ és $(\mathrm{Span}H)^\perp = H^\perp$ kiegészítő alterek, továbbá $(\mathrm{Span}H)^\perp$ és $((\mathrm{Span}H)^\perp)^\perp = (H^\perp)^\perp$ is kiegészítő alterek, tehát $\mathrm{Span}H$ és $(H^\perp)^\perp$ ugyanannak az altérnek kiegészítői, és $\mathrm{Span}H \subset (H^\perp)^\perp$, ami csak úgy lehet, ha a fenti egyenlőség fennáll.

31.6. Emlékezzünk vissza, hogy az $\boldsymbol{A} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezés $\boldsymbol{b}$-adjungáltját – amelyet itt egyszerűen adjungáltnak nevezünk – $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E})$ értelmezi.

Állítás *Ha* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{E})$, *akkor* $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^*) = (\mathrm{Ran}\boldsymbol{A})^\perp$.

Bizonyítás Legyen $\boldsymbol{x}$ az $\boldsymbol{A}^*$ magjában. Ekkor minden $\boldsymbol{y} \in \mathbf{E}$ esetén $\mathbf{0} = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})$, azaz $\boldsymbol{x}$ merőleges az $\boldsymbol{A}$ értékkészletére. Viszont, ha $\boldsymbol{x} \in (\mathrm{Ran}\boldsymbol{A})^\perp$, akkor minden $\boldsymbol{y} \in \mathbf{E}$ esetén $\mathbf{0} = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}$, azaz $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

31.7. A 31.5-ben mondottak szerint, ha $\mathbf{M}$ lineáris altér, akkor minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$ egyértelműen felbontható egy $\mathbf{M}$-beli és egy $\mathbf{M}$-re merőleges vektor összegére:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\mathbf{M}} + \boldsymbol{x}_{\mathbf{M}^\perp}. \tag{$*$}$$

A $\boldsymbol{P}_{\mathbf{M}} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_{\mathbf{M}}$ lineáris leképezés az $\mathbf{M}^\perp$ mentén az $\mathbf{M}$-re való vetítés, amelyet az $\mathbf{M}$-re való **merőleges vetítésnek** hívunk; $\boldsymbol{P}_{\mathbf{M}^\perp} = \mathrm{id}_{\mathbf{E}} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{M}}$ az $\mathbf{M}^\perp$-re való merőleges vetítés.

Ha $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{e} \in \mathbf{E}$, akkor $\mathbb{R}\boldsymbol{e}$ az $\boldsymbol{e}$ kifeszítette egy dimenziós altér (egyenes), $(\mathbb{R}\boldsymbol{e})^\perp$ pedig az a hipersík, amely az $\boldsymbol{e}$-re merőleges vektorokból áll. Az $\mathbb{R}\boldsymbol{e}$-re való merőleges vetítés

$$\frac{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}} = \left(\boldsymbol{x}\mapsto\frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}}\boldsymbol{e}\right).$$

Szokás azt is mondani, hogy $\dfrac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}}\boldsymbol{e}$ az $\boldsymbol{x}$-nek az $\boldsymbol{e}$-vel párhuzamos vetülete, $\boldsymbol{x} - \dfrac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}}\boldsymbol{e}$ pedig az $\boldsymbol{x}$-nek az $\boldsymbol{e}$-re merőleges vetülete.

Tehát: az $\boldsymbol{e}$-re való merőleges vetítés adja az $\boldsymbol{e}$-vel párhuzamos vetületet. Az elnevezések zavart okozhatnak; ezért kérjük az olvasót, ha ilyen kifejezésekkel találkozik, mindig gondolja meg alaposan, miről van szó pontosan.

31.8. Állítás *A $\boldsymbol{P} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés akkor és csak akkor egy altér mentén az ortogonális kiegészítőjére való vetítés, ha $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^*$.*

Bizonyítás Ha van olyan $\mathbf{M}$ lineáris altér, hogy $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\mathbf{M}}$, akkor a vetítések (projektorok) általános tulajdonsága szerint $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$, továbbá a 31.7. $(*)$ jelölést használva

$$\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_{\mathbf{M}} + \boldsymbol{x}_{\mathbf{M}^\perp})\cdot\boldsymbol{y}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{x}_{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{y}_{\mathbf{M}} = (\boldsymbol{x}_{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{y}_{\mathbf{M}} + \boldsymbol{y}_{\mathbf{M}^\perp}) = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y},$$

azaz $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{P}$.

Ha viszont $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^*$, akkor az első egyenlőség valamint a projektorok általános tulajdonsága szerint $\boldsymbol{P}$ a $\mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$ mentén a $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P}$-re való vetítés. A második egyenlőség és a 31.6. állítás szerint $\mathrm{Ker}\boldsymbol{P} = (\mathrm{Ran}\boldsymbol{P})^\perp = \mathbf{M}^\perp$, és ezt kellett belátnunk.

31.9. Tudjuk, hogy egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ izometrikus lineáris leképezés ortogonális, azaz ha $|\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$ minden $\boldsymbol{x}$-re, akkor akkor $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ minden $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ esetén (lásd 29.8.). Most azt látjuk be, hogy egy leképezés linearitása következik az ortogonalitásából, illetve egy "általánosabb értelmű" izometrikusságából.

Állítás *(i) Legyen $\boldsymbol{L} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ olyan leképezés, amelyre $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E}$ esetén. Ekkor $\boldsymbol{L}$ lineáris.*

(ii) Legyen $\boldsymbol{L} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ olyan leképezés, amelyre $|\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E}$ esetén és $\boldsymbol{L}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ekkor $\boldsymbol{L}$ lineáris.

Bizonyítás (i) Vegyük először is észre, hogy ha $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N$ az $\mathbf{E}$ ortogonális bázisa, akkor $\boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_N$ szintén ortogonális bázis, ezért $\mathrm{Ran}\boldsymbol{L}$ kifeszíti $\mathbf{E}$-t.

Ha $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}$, akkor $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2$, így $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = 0$, azaz $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, tehát $\boldsymbol{L}$ injektív.

Legyen $\boldsymbol{y}' := \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}' := \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}$, aztán elhagyva a vesszőket azt találjuk, hogy $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ran}\boldsymbol{L}$, és $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}$, ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$ és $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ran}\boldsymbol{L}$.

Ezért minden $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ran}\boldsymbol{L}$ és $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbf{E}$ esetén

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}_2 = \\ = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_2).\end{aligned}$$

Mivel $\boldsymbol{y}$ tetszőleges elem egy olyan halmazban, amely kifeszíti $\mathbf{E}$-t, azt következtethetjük, hogy

$$\boldsymbol{L}(x_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_2 \qquad (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbf{E}).$$

Teljesen hasonlóan érvelhetünk arra vonatkozóan, hogy $\boldsymbol{L}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$ esetén.

(ii) Mivel $\boldsymbol{L}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, az is igaz, hogy $|\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$ minden $\boldsymbol{x}$-re; így könnyen származtathatjuk az $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$ öszefüggést, és már csak az előző eredményt kell alkalmaznunk.

31.10. Az euklideszi vektorterek tipikus képviselője $(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}, \langle\ ,\ \rangle)$, ahol $\langle\ ,\ \rangle$ a 29.5-ben $\boldsymbol{H}_0$-lal jelölt bilineáris forma, amelyet **skaláris szorzatnak** hívunk:

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle := \sum_{k=1}^{N} \xi_k \eta_k.$$

Pontosabban, 29.8. szerint minden N dimenziós euklideszi vektortér izomorf a fentivel.

A $\langle\ ,\ \rangle$ által létrehozott $\mathbb{R}^N \equiv (\mathbb{R}^N)^\star$ azonosítás megegyezik a standarddal. Ezért itt a lenn-fenn indexezés szükségtelen.

Egy $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris leképezés (mátrix) adjungáltja a 30.2. szerint megegyezik a transzponáltjával.

31.11. Legyen $\boldsymbol{m}$ a $\mathbf{D}$ pozitív eleme. Az $\mathbf{E}$-beli $\boldsymbol{m}$-re normált $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ irányított ortogonális bázis duálisa az $\mathbf{E}^\star \equiv \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}}$ azonosításban $\left(\dfrac{\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{m}^2}, \dots, \dfrac{\boldsymbol{e}_N}{\boldsymbol{m}^2}\right)$. Ennek a bázisnak megfelelő koordinátázás homotetikus $\boldsymbol{b} - \langle\ ,\ \rangle$-ortogonális leképezés $\mathbf{E}$ és $\mathbb{R}^N$ között, amelyben az $\boldsymbol{x}$ vektor koordinátái

$$\left(\frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{m}^2} \,\middle|\, i = 1, \dots, N \right).$$

Ilyen koordinátázásban "minden a helyén van". Az $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i \boldsymbol{e}_i$ és $\boldsymbol{y} = \sum\limits_{i=1}^{N} \eta_i \boldsymbol{e}_i$ vektorok pontszorzatát a kordinátáik skaláris szorzatával számíthatjuk ki:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{m}^2 \sum_{i=1}^{N} \xi_i \eta_i.$$

Az $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{E})$ adjungáltjának a mátrixa az $\boldsymbol{A}$ mátrixának a transzponáltja, hiszen:

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i.$$

Ha $(\boldsymbol{e}'_1 \dots, \boldsymbol{e}'_N)$ az $\boldsymbol{m}'$-re normált ortogonális bázis, akkor a "vesszős" bázisról a "vesszőtlenre" való áttérés mátrixa

$$\left(\frac{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}'_i}{\boldsymbol{m}^2} \;\middle|\; k, i = 1, \dots, N \right).$$

Nem ilyen szép a helyzet, ha nem merőleges bázis szerint koordinátázunk. Legyen $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ az $\mathbf{E}$ akármilyen bázisa. Ekkor például az $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^N \xi_i \boldsymbol{v}_i$ és $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^N \eta_i \boldsymbol{v}_i$ vektorok pontszorzatát nem egyszerűen a kordinátáik skaláris szorzatával számíthatjuk ki:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_k)\xi_i \eta_k.$$

A bázis duálisát $\mathbf{E}$-beli $(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N)$ vektorokkal reprezentálhatjuk úgy, hogy

$$\frac{\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{v}_k}{\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, \dots, N).$$

Fizikai alkalmazásokban $(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N)$-et a $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ **reciprok rendszerének** szokás nevezni.

Ezekkel a vektorokkal meggyőződhetünk arról, hogy a $\boldsymbol{A}^*$ mátrixa itt nem az $\boldsymbol{A}$ mátrixának a transzponáltja:

$$\frac{\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{v}_k}{\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i} = \frac{\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_i}{\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i} \neq \frac{\boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{r}_k}.$$

31.12. Egyszerűbbé tehetünk sok formulát az

$$\mathbf{N} := \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{D}}$$

elemeinek használatával.

A $\boldsymbol{b}$ az $\mathbf{N}$-en a 29.4-ben megismert módon meghatároz egy valós értékű pozitív definit szimmetrikus bilineáris leképezést, amelyet ugyancsak pontszorzással jelölünk, és (mivel valós értékű) skaláris szorzásnak hívjuk. Az $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}$ hossza valós szám: $|\boldsymbol{n}| := \sqrt{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}}$.

Az euklideszi szerkezet az $\mathbf{E}^\star \equiv \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}}$ azonosítás megfelelőjeként az $\mathbf{N}^\star \equiv \mathbf{N}$ azonosítást adja.

Ha $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{e} \in \mathbf{E}$, akkor $\boldsymbol{n} := \dfrac{\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{e}|}$ **egységvektor** $\mathbf{N}$=ben, azaz $|\boldsymbol{n}| = 1$. Ezzel a jelöléssel az $\mathbb{R}\boldsymbol{e} = \mathbf{D} \otimes \boldsymbol{n}$ egy dimenziós altérre való merőleges vetítés $\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$.

Ha $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ az $\mathbf{E}$-nek ortogonális bázisa, akkor

$$\boldsymbol{n}_k := \frac{\boldsymbol{e}_k}{|\boldsymbol{e}_k|} \qquad (k = 1, \dots, N)$$

az $\mathbf{N}$-nek **ortonormált bázisa**, azaz $\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{n}_k = \delta_{ik}$. Ennek megfelelően egy $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$ koordinátái a szóban forgó bázisban

$$(\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{x} \mid i = 1, \dots, N),$$

egy $\boldsymbol{A} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezés mátrixa pedig – ugyancsak a 29.4-beli megállapodásunkkal –

$$(\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_k \mid i, k = 1, \dots, N).$$

31.13. Feladatok

1. Legyen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E}$. Mutassuk meg, hogy

(i) $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2$;

(ii) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ és $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}|$;

(iii) $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2 = 2|\boldsymbol{x}|^2 + 2|\boldsymbol{y}|^2$ (ezt parallelogramma-egyenlőségnek szokás hívni).

2. Bizonyítsuk be, hogy a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség (az egyenlőségre vonatkozó kijelentés nélkül) akkor is igaz, ha $\boldsymbol{b}$ pozitív szemidefinit.

3. Legyen $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ lineáris altér $\mathbf{E}$-ben. Igazoljuk, hogy

$$(\mathbf{M} + \mathbf{N})^\perp = \mathbf{M}^\perp \cap \mathbf{N}^\perp, \qquad (\mathbf{M} \cap \mathbf{N})^\perp = \mathbf{M}^\perp + \mathbf{N}^\perp.$$

4. Legyen $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{Q}$ merőleges vetítés. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P}$ és $\mathrm{Ran}\boldsymbol{Q}$ pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} = \mathbf{0}$.

5. Legyenek $\boldsymbol{P}_1, \dots, \boldsymbol{P}_n$ merőleges vetítések. Bizonyítsuk be, hogy $\boldsymbol{P} := \sum_{i=1}^n \boldsymbol{P}_i$ pontosan akkor merőleges vetítés, ha $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j = \mathbf{0}$ $(i, j = 1, \dots, n, i \neq j)$ (azaz páronként merőleges altérre vetítenek), és ebben az esetben $\boldsymbol{P}$ a $\sum_{i=1}^n \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_i$ altérre való merőleges vetítés.

6. Jellemezzük az $\mathbb{R}^2$-beli merőleges vetítéseket (vagyis azokat a 2×2-es $\boldsymbol{P}$ mátrixokat, amelyekre $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^*$ teljesül).

7. Hipersíknak neveztük az olyan alteret illetve annak eltoltját, amelynek a dimenziója eggyel kisebb a vektortér dimenziójánál.

A nullán átmenő hipersík – hiperaltér – ortogonális kiegészítője egy dimenziós, azaz egyenes. Ez az egyenes, sőt az egyenes bármely nem nulla vektora egyértelműen meghatározza a hipersíkot. Egy hipersík **normálvektorának** nevezünk minden olyan nem nulla vektort, amely merőleges a megfelelelő hiperaltérre, vagyis arra, amelynek az eltoltja a hipersík.

Az $\boldsymbol{x}$ ponton átmenő $\boldsymbol{n}$ normálvektorú hiprsík

$$\boldsymbol{x} + \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{E} \mid \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{z} = \mathbf{0}\} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{E} \mid \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Adjuk meg $\mathbb{R}^3$-ban a $(0,1,2)$ ponton átmenő, $(1,1,2)$ normálvektorú síkot!

8. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$-ban az $(1,0,1)$, $(1,2,1)$ és $(0,0,1)$ pontokon átmenő síkot! (Útmutatás: határozzuk meg a sík egy normálvektorát, mint olyan vektort, amely merőleges az $(1,0,1)-(0,0,1)$ és az $(1,2,1)-(0,0,1)$ vektorra.)

9. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$-ban az

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

vektorok kifeszítette altér egy ortonormált bázisát.

10. Állítsunk elő ortonormált rendszert a Gram–Schmidt-féle ortogonalilzációs eljárással $\mathbb{R}^4$-ben az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vektorokból kiindulva.

11. Legyen az $\mathbf{E}$ euklideszi tér egy bázisa $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$. Határozzuk meg az $\{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4\}$ vektorok kifeszítette lineáris altér ortogonálisának egy ortonormált bázisát.

12. Jellemezzük azokat az $\boldsymbol{A} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezéseket, amelyekkel a $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E})$ formulával meghatározva $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{A}})$ (i) pszeudo-euklideszi, (ii) euklideszi vektortér lesz.

13. Legyen $L : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ olyan leképeézés, amelyre $|L(\boldsymbol{y}) - L(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ minden $\boldsymbol{x}, y, \in \mathbf{E}$ esetén. Ekkor van olyan $\boldsymbol{L} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezés, hogy $L(\boldsymbol{x}) = L(\mathbf{0}) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbf{E})$.

32. A vektoriális szorzás

32.1. Ahhoz, hogy a fizikában sokat használt vektoriális szorzás lényegét megértsük, először az euklideszi vektorterek antiszimmetrikus leképezéseivel kell alaposabban megismerkednünk.

Idézzük fel a 30. fejezet néhány eredményét egy $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \boldsymbol{b})$ eudklideszi vektortérre, és használjuk az előző fejezet jelöléseit.

A $\boldsymbol{b}$-antiszimmetrikus – röviden antiszimmetrikus – lineáris leképezések összessége, $A(\boldsymbol{b}) \equiv \mathbf{E} \wedge \mathbf{E}^\star \equiv \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$ a $\mathrm{Lin}(\mathbf{E})$-nek lineáris altere, amelyen célszerű (a következő formulák mutatják, miért) a 30.7-ben megadott $:$ euklideszi forma helyett annak az 1/2-szeresét használni:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AB}) \qquad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}).$$

Az $\boldsymbol{A} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$ hossza valós szám, $|\boldsymbol{A}| := \sqrt{\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}}$.

Ha $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \in \mathbf{N}$, akkor

$$(\boldsymbol{m}_1 \wedge \boldsymbol{n}_1) \bullet (\boldsymbol{m}_2 \wedge \boldsymbol{n}_2) = (\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2)(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2) - (\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{m}_2 \cdot \boldsymbol{n}_1),$$

speciálisan ha $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 =: \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2 =: \boldsymbol{n}$, akkor

$$|\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}|^2 = |\boldsymbol{m}|^2|\boldsymbol{n}|^2 - (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n})^2. \tag{$*$}$$

Az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ antiszimmetrikus leképezés kommutátora, $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ is antiszimmetrikus, amely merőleges mind $\boldsymbol{A}$-ra, mind $\boldsymbol{B}$-re, és tetszőleges $\boldsymbol{C}$ antiszimmetrikus leképezésre

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \bullet \boldsymbol{C} = [\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}] \bullet \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] \bullet \boldsymbol{A}. \tag{$**$}$$

32.2. Ha $\boldsymbol{A} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$, azaz $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}$, akkor a 31.6. szerint $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^*) = (\mathrm{Ran}\boldsymbol{A})^\perp$, vagyis $\boldsymbol{A}$ magja és értékkészlete egymás merőleges kiegészítői, amit sokszor jól fel tudunk használni.

Állítás *Nem nulla antiszimmetrikus leképezés rangja páros.*

Bizonyítás Legyen $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{A} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$. Ekkor van $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$. Ez a vektor nem lehet $\boldsymbol{A}$ magjában, hiszen $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} \cap \mathrm{Ran}\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}\}$. Ezért $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$. Továbbá $\boldsymbol{x}_1$ és $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$ merőlegesek egymásra az $\boldsymbol{A}$ antiszimmetrikussága miatt. Az $\boldsymbol{x}_1$ és $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$ kifeszítette altér két dimenziós $\boldsymbol{A}$ értékkészletében; ha megegyezik vele, véget ért a bizonyítás. Ha nem, akkor van olyan $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$, amely merőleges mind x_1-re, mind $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$-re, és természetesen az $\boldsymbol{A}$ antiszimmetrikussága miatt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$-re is, amely ugyanúgy nem lehet nulla, ahogy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$. Az $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$ vektorok lineárisan függetlenek. Tegyük ugyanis föl, hogy $\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \beta_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \beta_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$. "Pontszorozva" ezt az egyenlőséget $\boldsymbol{x}_2$-vel azt kapjuk, hogy $\alpha_2 = 0$. Ezután $\boldsymbol{x}_1$-gyel szorozva és kihasználva azt, hogy $\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$, azt kapjuk, hogy $\alpha_1 = 0$. Marad: $\boldsymbol{A}(\beta_1\boldsymbol{x}_1 + \beta_2\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}$, ami csak úgy lehet, hogy $\beta_1\boldsymbol{x}_1 + \beta_2\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$, mert ez a vektor merőleges az $\boldsymbol{A}$ magjára. Mivel $\boldsymbol{x}_1$ és $\boldsymbol{x}_2$ merőleges egymásra, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Ha a szóban forgó négy lineárisan független vektor kifeszíti $\boldsymbol{A}$ értékkészletét, akkor véget ért a bizonyítás. Ha nem, akkor az előzőhöz hasonlóan tovább- és továbbléphetünk, míg oda nem érkezünk, hogy megadtunk $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \ldots, \boldsymbol{x}_n$ vektorokat úgy, hogy minden $k = 2, \ldots, n$ esetén $\boldsymbol{x}_k$ merőleges $\boldsymbol{x}_1$-re, $\boldsymbol{x}_2$-re, $\ldots$, $\boldsymbol{x}_{k-1}$-re és

$\boldsymbol{Ax}_1$-re, $\boldsymbol{Ax}_2$-re, ..., $\boldsymbol{Ax}_{k-1}$-re. Az $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{Ax}_1, \dots, \boldsymbol{Ax}_n$ vektorok lineárisan fügetlenek és kifeszítik az $\boldsymbol{A}$ értékkészletét.

32.3. A következőkben feltesszük, hogy

$$\dim \mathbf{E} = 3.$$

Ez a speciális eset matematikailag érdekes, különös jelentőséggel azonban a "fizikai terünkkel" való kapcsolata ruházza fel.

32.4. Az előzőek szerint most (három dimenzióban) minden nem nulla antiszimmetrikus lineáris leképezés rangja kettő, azaz értékkészlete két dimenziós, magja pedig (az értékkészlet merőleges kiegészítője) egy dimenziós.

Állítás *Ha $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{A} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$, akkor az $\boldsymbol{A}$ magjára merőleges minden $\boldsymbol{n}$ egységvektorhoz létezik egyértelműen egy $\boldsymbol{m}$ egységvektor, amely merőleges* $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$*-ra és $\boldsymbol{n}$-re, amellyel*

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}.$$

BIZONYÍTÁS Egészítsük ki $\boldsymbol{n}$-et $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ ortonormált bázissá úgy, hogy $\boldsymbol{n}_1 := \boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{n}_3 \in \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$. Ezzel $\boldsymbol{n}_2$ és $\boldsymbol{n}_3$ előjel erejéig egyértelmű. Mint tudjuk, $\boldsymbol{n}_1, \wedge\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3, \wedge\boldsymbol{n}_1$ és $\boldsymbol{n}_2, \wedge\boldsymbol{n}_3$ bázis $\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$-ben, tehát egyértelműen meghatározott együtthatókkal

$$\boldsymbol{A} = \alpha_3 \boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2 + \alpha_2 \boldsymbol{n}_3 \wedge \boldsymbol{n}_1 + \alpha_1 \boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3.$$

Mivel $\mathbf{0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_3 = -\alpha_2 \boldsymbol{n}_1 + \alpha_1 \boldsymbol{n}_2$, azt kapjuk, hogy $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$. A 32.1. $(*)$ formula szerint $|\alpha_3| = |\boldsymbol{A}|$, tehát $\boldsymbol{m} := (\mathrm{sign}\alpha_3)\boldsymbol{n}_2$ egyértelműen meghatározott vektor az előírt tulajdonságokkal. ■

Eredményünk egyszerű következményei:

(i) Ha $\boldsymbol{x} \in (\mathrm{Ker}\boldsymbol{A})^\perp = \mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$, akkor

– $|\boldsymbol{Ax}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{x}|$,

– $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = -|\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{x}$;

(ii) $\boldsymbol{A}^3 = -|\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{A}$;

(iii) Ha $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$, $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{B} \neq \mathbf{0}$, akkor az alábbi három kijelentés egyenértékű:

– $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ egymás számszorosai

– $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} = \mathrm{Ker}\boldsymbol{B}$,

– $\mathrm{Ran}\boldsymbol{A} = \mathrm{Ran}\boldsymbol{B}$.

Az (i)-ben foglaltakat így önthetjük szavakba: az $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Ax}$ hozzárendelés a $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$-ban levő elemeket a nullába képezi, a $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$-ra merőleges síkban a vektorokat $\pi/2$ szöggel elforgatja és $|\boldsymbol{A}|$-szorosra nyújtja.

32.5. Állítás *Ha* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$, *akkor*

$$|[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]|^2 = |\boldsymbol{A}|^2 |\boldsymbol{B}|^2 - (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B})^2.$$

Bizonyítás ha $\boldsymbol{A}$ párhuzamos $\boldsymbol{B}$-vel (speciálisan, ha valamelyik nulla), akkor nyilvánvalóan fennáll az egyenlőség. Ha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ nem práhuzamos egymással, akkor végigosztva $|\boldsymbol{A}|^2 ||\boldsymbol{B}|^2$-tel, visszavezetjük a problémát az $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = 1$ esetre. $\boldsymbol{A}$ értékkészlete és $\boldsymbol{B}$ értékkészlete két dimenziós altér, amelyek nem egyenlők, így a metszetük egy dimenziós altér; legyen ez $\mathbf{D} \otimes \boldsymbol{n}$, ahol $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}$ egységvektor. Ekkor az előzőek szerint van olyan az $\boldsymbol{n}$-re merőleges $\boldsymbol{m}$ és $\boldsymbol{k}$ egységvektor, hogy $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{n}$. A 30.8. $(*)$ szerint $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{k}$, tehát a 32.1. $(*)$ formulájából $|[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]|^2 = 1 - (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{k})^2$, az előtte levő formula szerint pedig $(\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{k})^2$, és ezzel befejeztük a bizonyítást.

32.6. Ne feledjük, még mindig, továbbra is azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\mathbf{E}$ három dimenziós. Ekkor $\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$ is három dimenziós (amit fel is használtunk a 32.4. bizonyításában). Ha $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$ egyike sem nulla és egymásra merőlegesek, akkor $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \neq \mathbf{0}$ az előző eredmény szerint, így 32.1. $(**)$ alapján $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ és $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ ortogonális bázist alkotnak $\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$-ben.

Állítás *Ha* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$, *akkor*

$$\big[[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}], \boldsymbol{C}\big] = (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}.$$

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ párhuzamos, akkor mindkét oldal zérus. Általában $\boldsymbol{B}$-t felbonthatjuk $\boldsymbol{A}$-val páruzamos és $\boldsymbol{A}$-ra merőleges komnponensekre, így a fenti kifejezéseket, mivel azok $\boldsymbol{B}$-ben lineárisak, kéttagú összeg alakjában írhatjuk fel; ezekből az $\boldsymbol{A}$-val párhuzamos vetületet tartalmazó tagok mind nullák. Más szóval elég tetszőleges $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{A}$-ra merőleges $\boldsymbol{B}$-t vennünk. Végül, mivel az egyenlőségben szereplő kifejezések $\boldsymbol{C}$-ben lineárisak, elég három lineárisan független elemet venni $\boldsymbol{C}$ szerepére; legyenek ezek $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ és $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$.

$\boldsymbol{C} := [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ esetén mindkét oldal zérus, tehát igaz az egyenlőség.

$\boldsymbol{C} := \boldsymbol{A}$ esetén $\big[[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}], \boldsymbol{A}\big]$ merőleges mind $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$-re, mind $\boldsymbol{A}$-ra, azaz párhuzamos $\boldsymbol{B}$-vel: van olyan α valós szám, hogy $\big[[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}], \boldsymbol{A}\big] = \alpha \boldsymbol{B}$. Ebből a 32.1. $(**)$ miatt $\alpha |\boldsymbol{B}|^2 = \big[[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}], \boldsymbol{A}\big] \bullet \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \bullet [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = |[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]|^2$. Az előző állítás szerint tehát $\alpha = |\boldsymbol{A}|^2$, így fennáll a kívánt egyenlőség.

Teljesen hasonlóan érvelhetünk a $\boldsymbol{C} := \boldsymbol{B}$ esetben is.

32.7. Azt már a legelején feltettük, hogy $\mathbf{D}$ irányított, mert így tudtuk a vektorok hosszát értelmezni. Ez nem volt lényeges feltétel, mert enélkül is értelmes a vektorok hossz-négyzete, amivel mindent meg tudtunk volna fogalmazni, csak egy kicsit körülményesebben.

Most feltesszük, hogy $\mathbf{E}$ is irányított. Ekkor $\mathbf{N}$ is irányított, és megadható az

$$\boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3$$

Levi–Civita-tenzor, ahol $(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)$ az $\mathbf{N}$-nek pozitívan irányított ortonormált bázisa.

Tudjuk, hogy a Levi–Civita-tenzor a

$$\boldsymbol{j} : \mathbf{N} \wedge \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \qquad \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n} \mapsto \boldsymbol{\epsilon}(\cdot, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$$

képlettel meghatározta lineáris bijekciót létesíti (ez a (-1)-szerese annak, amit 30.10-ben $\boldsymbol{j}_2$-vel jelöltünk). Idézzük fel, hogy ebben a képletben benne van az $\mathbf{N}^\star \equiv \mathbf{N}$ azonosítás: $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n})$ az az eleme $\mathbf{N}$-nek, amelyet tetszőleges $\boldsymbol{k}$-val skalárisan szorozva $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$-et kapunk.

A Levi–Civita-tenzor antiszimmetrikus, ezért $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n})$ merőleges mind $\boldsymbol{m}$-re, mind $\boldsymbol{n}$-re: $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = 0$.

Ha $(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)$ pozitívan irányított ortonormált bázis $\mathbf{N}$-ben, akkor

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2) = \boldsymbol{n}_3, \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}_3 \wedge \boldsymbol{n}_1) = \boldsymbol{n}_2 \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3) = \boldsymbol{n}_1. \tag{$*$}$$

Állítás *Ha* $\boldsymbol{A} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$, *akkor*

(i) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$, *más szóval* $\mathbf{D} \otimes \boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$,

(ii) $|\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A})| = |\boldsymbol{A}|$,

(iii) az $\boldsymbol{A}$ *magjára merőleges minden nem nulla* $\boldsymbol{n}$ *vektor esetén* $(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{n}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{n})$ *pozitívan irányított ortogonális bázis* $\mathbf{N}$*-ben.*

Bizonyítás Vegyünk az $\boldsymbol{A}$ magjára merőleges $\boldsymbol{n}_1$ egységvektort. Ekkor létezik olyan $\boldsymbol{n}_2$ egységvektor, amely merőleges mind $\boldsymbol{n}$-re, mind az $\boldsymbol{A}$ magjára, és $\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2$. Legyen végül $\boldsymbol{n}_3$ olyan egységvektor, amely párhuzamos az $\boldsymbol{A}$ magjával. Az állítás összefüggései azonnal következnek $(*)$-ból. ■

Mivel $\boldsymbol{j}$ lineáris, (ii) egyenértékű azzal (lásd 29.8.), hogy $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ minden $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$ esetén (amit egyébként közvetlenül is könnyen bebizonyíthatunk azzal, hogy $\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{n}$).

32.8. Definíció *Az*

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \quad (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \mapsto \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} := \boldsymbol{j}(\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n})$$

leképezést ***vektoriális szorzásnak*** *hívjuk.*

Nyilvánvaló, hogy a vektoriális szorzás antiszimmetrikus bilineáris leképezés, és $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{m}$ és $\boldsymbol{n}$ párhuzamos egymással. $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ merőleges mind $\boldsymbol{m}$-re, mind $\boldsymbol{n}$-re, és

$$|\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}|^2 = |\boldsymbol{m}|^2|\boldsymbol{n}|^2 - (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n})^2 = |\boldsymbol{m}|^2|\boldsymbol{n}|^2 \left(1 - \frac{(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n})^2}{|\boldsymbol{m}|^2|\boldsymbol{n}|^2}\right),$$

ahol a második egyenlőség akkor igaz, ha $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}$ és $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$. Eredményünket átírhatjuk így is:

$$|\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}| = |\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}| \sin(\arg(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})).$$

Ha $(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)$ pozitívan irányított ortonormált bázis, akkor

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}_3, \quad \boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{n}_1, \quad \boldsymbol{n}_3 \times \boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2. \tag{$**$}$$

Állítás *Ha* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}, \boldsymbol{n} \in \mathbf{N}$, *akkor*

(i) $\boldsymbol{j}([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]) = -\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{B})$, *ami azzal egyenértékű, hogy*

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}) \wedge \boldsymbol{j}(\boldsymbol{B}) = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}];$$

(ii)$\boldsymbol{A}\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{n}$, *amiből*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{j}([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]).$$

Bizonyítás Van olyan $(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)$ pozitívan irányított bázis, hogy $\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2$. Mivel a bizonyítandó (i) összefüggés lineáris $\boldsymbol{B}$-ben, (ii) pedig lineáris $\boldsymbol{n}$-ben, elég megmutatni, hogy az összefüggés igaz egy bázis elemeire. Ez a bázis az (i) esetben $\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3$, $\boldsymbol{n}_3 \wedge \boldsymbol{n}_1$, az (ii) esetben pedig $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$. Ezután a 30.8. $(*)$ szerint például

$$\boldsymbol{j}([\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3]) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_3) = -\boldsymbol{n}_2,$$

és

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3) = (\boldsymbol{n}_3) \times (\boldsymbol{n}_1) = \boldsymbol{n}_2.$$

Hasonlóan, például

$$(\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_1 = (\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{n}_1) - \boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1) = -\boldsymbol{n}_2,$$

és

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2) \times \boldsymbol{n}_1 = (\boldsymbol{n}_3) \times \boldsymbol{n}_1) = \boldsymbol{n}_2. \blacksquare$$

Eredményünk és 32.7.(iii) következménye, hogy ha $\boldsymbol{m}$ és $\boldsymbol{n}$ nem párhuzamos egymással, akkor $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n})$ pozitívan irányított bázis. Továbbá 32.5. és 32.6. alapján az $\mathbf{N}$ minden $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ elemére

$$(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{m}) \cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{m},$$

és

$$(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{m}) \times \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{m} - (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{k}.$$

32.9. Sokszor jó szolgálatot tesz a "Levi–Civita-szimbólum":

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{ha } ijk \text{ páros permutació,} \\ -1 & \text{ha } ijk \text{ páratlan permutació,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ami nem más mint a Levi–Civita-tenzor hiprmátrixa tetszőleges pozitívan irányított ortonormált bázisban.

Ezzel ugyanis a 32.7.(∗) és a 32.8.(∗∗) összefüggés átírható

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}_i \wedge \boldsymbol{n}_k) = \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ikj} \boldsymbol{n}_j, \qquad \boldsymbol{n}_i \times \boldsymbol{n}_k = \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ikj} \boldsymbol{n}_j \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

alakba, ami persze a $\boldsymbol{j}$ definíciójából adódik:

$$\boldsymbol{n}_j \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}_i \wedge \boldsymbol{n}_k) = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{n}_j, \boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{n}_k) = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{n}_k, \boldsymbol{n}_j) = \epsilon_{ikj}.$$

Következésképpen

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \boldsymbol{n}_i\right) \times \left(\sum_{k=1}^{3} \beta_k \boldsymbol{n}_k\right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i,k=1}^{3} \alpha_i \beta_k \epsilon_{ikj}\right).$$

Speciálisan az $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \langle\ ,\ \rangle)$ euklideszi térben, ha a standard irányítást vesszük, akkor

$$(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta})_j = \sum_{i,k=1}^{3} \xi_i \eta_k \epsilon_{ikj} = \sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{jik} \xi_i \eta_k,$$

ami részletesen kiírva:

$$(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta})_1 = \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2,$$
$$(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta})_2 = \xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3,$$
$$(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta})_3 = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1.$$

Ebben az euklideszi vektortérben $\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3$ elemei a 3×3-as antiszimmetrikus mátrixok. Jelölje $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ a standard bázist $\mathbb{R}^3$-ban. Egyszerű tény, hogy

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

és hasonló formulákat írhatunk fel $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$-ra és $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$-re is. Ezek alapján könnyen beláthatjuk, hogy a

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{23} \\ -\alpha_{13} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix}$$

hozzárendelés megegyezik $\boldsymbol{j}$-vel. Jobban megjegyezhető ennek az inverze:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ a_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Formulákban:

$$\boldsymbol{j}(\alpha_{ik} \mid i,k = 1,2,3) = \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ikj} \alpha_{ik} \,\middle|\, j = 1,2,3 \right),$$

$$\boldsymbol{j}^{-1}(\alpha_j \mid j = 1,2,3) = \left(\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ikj} \alpha_j \mid i,k = 1,2,3 \right).$$

A 32.8. állítás (ii) pontja szerint

$$\begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}.$$

32.10. A $\boldsymbol{j} : \mathbf{N} \wedge \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ leképezés a 27.4-ben ismertetett módon átvihető

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{N}) \wedge (\mathbf{B} \otimes \mathbf{N}) \to \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{N}, \quad (\boldsymbol{am}) \wedge (\boldsymbol{bn}) \mapsto (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n})$$

leképezéssé, ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ akármilyen egy dimenziós vektortér. Így például $\mathbf{E} = \mathbf{D} \otimes \mathbf{N}$ miatt

$$\boldsymbol{j} : \mathbf{N} \wedge \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \text{vagy} \quad \boldsymbol{j} : \mathbf{E} \wedge \mathbf{E} \to \mathbf{D} \otimes \mathbf{E}.$$

Ezek szerint a vektoriális szorzás is átvihető $\mathbf{N}$-ről $\mathbf{N}$-nek akármilyen egy dimenziós vektortérrel való tenzorszorzataira (vagy tenzorhányadosaira):

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{N}) \times (\mathbf{B} \otimes \mathbf{N}) \to \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{N} \quad (\boldsymbol{am}) \times (\boldsymbol{bn}) \mapsto \boldsymbol{ab}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}).$$

Tehát a vekoriális szorzás átvihető $\mathbf{D} \otimes \mathbf{N} = \mathbf{E}$-re és annak egy dimenziós vektorterekkel való tenzorszorzataira és tenzorhányadosaira is. Például

$$\mathbf{N} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \qquad \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{D} \otimes \mathbf{E}$$

vektoriális szorzatunk van.

Itt említjük meg, hogy a Levi–Civita-tenzor a $\boldsymbol{j}$-n túl egy másik bijekciót is létesít:

$$j_0 : \overset{3}{\wedge} \mathbf{N} \to \mathbb{R} \quad \boldsymbol{m}_1 \wedge \boldsymbol{m}_2 \wedge \boldsymbol{m}_3 \mapsto \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3),$$

amelynek az inverze $\alpha \mapsto \alpha\boldsymbol{\epsilon}$. Természetesen ez is átvihető tenzorszorzatokra és tenzorhányadosokra; például

$$j_0 : \overset{3}{\wedge} \mathbf{E} \to \overset{3}{\otimes} \mathbf{D},$$

amelyet az jellemez, hogy ha $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ pozitívan irányított ortogonális bázis. akkor $\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = |\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2||\boldsymbol{e}_3|$.

32.11. Emlékeztetünk (lásd 29.8), hogy egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezést $\boldsymbol{b}$-ortogonálisnak – röviden ortogonálisnak – nevezünk, ha $\boldsymbol{Lx} \cdot \boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E}$ esetén. Az $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ ortogonális leképezések összességét $O(\boldsymbol{b})$-vel jelöljük. Egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezésre a következők egyenértékűek:

(i) $\boldsymbol{L} \in O(\boldsymbol{b})$,

(ii) $\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}^{-1}$, (30.3.állítás),

(iii) $\boldsymbol{L}$ izometrikus, azaz $|\boldsymbol{Lx}| = |\boldsymbol{x}|$ minden x-re (29.8. állítás).

$O(\boldsymbol{b})$ elemeinek a determinánsa 1 vagy -1. Azokat az elemeket, amelyeknek 1 a determinánsa, **forgatásoknak** nevezzük. $\boldsymbol{T} := -\mathrm{id}_{\mathbf{E}}$ (az $\boldsymbol{x} \mapsto -\boldsymbol{x}$ leképezés) neve: **tükrözés**. A tükrözés determinánsa -1. Minden negatív determinánsú elem egy forgatásnak és a tükrözésnek a szorzata.

Az $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezéseket 27.4. alapján $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ lineáris leképezéseknek foghatjuk fel, és viszont. Ennek értelmében a determináns definíciója szerint $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{Lk}, \boldsymbol{Lm}, \boldsymbol{Ln}) = (\det \boldsymbol{L})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$, amiből azonnal adódik, hogy minden $\boldsymbol{L} \in O(\boldsymbol{b})$ és $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbf{N}$ esetén

$$j_0(\boldsymbol{Lk} \wedge \boldsymbol{Lm} \wedge \boldsymbol{Ln}) = (\det \boldsymbol{L}) j_0(\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}) \qquad (*)$$

és

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{Lm} \wedge \boldsymbol{Ln}) = (\det \boldsymbol{L})\boldsymbol{Lj}(\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}); \tag{$**$}$$

ez utóbbiból

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}) = (\det \boldsymbol{L})(\boldsymbol{Lm}) \times (\boldsymbol{Ln}).$$

A 30.11.1. feladat alapján

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n})\boldsymbol{L}^{-1} = (\boldsymbol{Lm}) \wedge (\boldsymbol{Ln}),$$

ezért a $(**)$ összefüggést így is írhatjuk:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{LAL}^{-1}) = (\det \boldsymbol{L})\boldsymbol{Lj}(\boldsymbol{A}) \qquad (\boldsymbol{A} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}).$$

32.12. A fizikai terünk irányított szakaszai egy háromdimenziós euklideszi vektortér elemeivel modellezhetők. Ezért ezekkel az irányított szakaszokkal szemléletessé tehetjük a vektoriális szorzást.

A szokásos meghatározás szerint az egymással nem nulla α szöget bezáró $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektor vektoriális szorzata az vektor, amelynak a hossza $|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\sin\alpha$, és amely merőleges mind $\boldsymbol{x}$-re, mind $\boldsymbol{y}$-ra, úgy hogy $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ és $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ jobb sodrású rendszert alkotnak, vagyis úgy következnek sorba, mint jobb kezünk hüvelyk-, mutató és középső ujja.

Ez a kép szemléletes, de nem teljesen helytálló. Ugyanis fizikai terünk irányított szakaszainak hossza nem valós szám, tehát olyan $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \boldsymbol{b})$-vel kell modelleznünk ezeket az irányíott szakaszokat, amelyben $\mathbf{D} \neq \mathbb{R}$, így két $\mathbf{E}$-beli vektor vektoriális szorzata már nem az $\mathbf{E}$ eleme, vagyis két irányított szakasz vektoriális szorzata már nem irányított szakasz.

Szokás a fizikában a fizikai mennyiségeket skalárokra, vektorokra, axiálvektorokra (vagy más néven pszeudovektorokra) és pszeudoskalárokra osztályozni a következő “meghatározás” szerint:

– a skalárok invariánsak mind a forgatásokra mind a tükrözésre,
– a vektorokat a forgatások elforgatják, a tükrözés tükrözi,
– az axiálvektorokat a forgatások elforgatják, de invariánsak a tükrözésre,
– a pszeudoskalárok invariánsak a forgatásokra, előjelet váltanak a tükrözésre.

Axiálvektorra példaként két vektor vektoriális szorzatát szokták felhozni: két vektor tükrözöttjének a vektoriális szorzata ugyanaz, mint az eredetieké, vagyis a vektoriális szorzat nem tükröződött. Ez így persze nem helytálló, hiszen bármely vektor előállítható két másik vektor vektoriális szorzataként.

A meghatározás pontosan így hangozhatna az $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \boldsymbol{b})$ három dimenziós euklideszi vektortér esetén:

– skalárok a $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^\star$ és ezek tenzorszorzatainak, tenzorhányadosainak az elemei,
– vektorok az $\mathbf{E}$ elemei és ezeknek skalárokkal való szorzatai,
– axiálvektorok az $\mathbf{E} \wedge \mathbf{E}$ elemei és ezeknek skalárokkal való szorzatai,
– pszeudoskalárok az $\mathbf{E} \wedge \mathbf{E} \wedge \mathbf{E}$ elemei és ezeknek skalárokkal való szorzatai.

$\mathbf{E} \wedge \mathbf{E}$ háromdimenziós vektortér, amely azonosítható $\mathbf{D} \otimes \mathbf{E}$-vel a $\boldsymbol{j}$ bijekció által, tehát az axiálvektorok olyanok, mintha vektorok lennének, csak éppen az az előző pont $(**)$ összefüggése szerint a tükrözés invariánsan hagyja őket.

$\mathbf{E} \wedge \mathbf{E} \wedge \mathbf{E}$ egy dimenziós vektortér, amely azonosítható $\overset{3}{\otimes}\mathbf{D}$-vel a j_0 bijekció által, tehát a pszeudoskalárok olyanok, mintha skalárok volnának, csak éppen az előző pont $(*)$ összefüggése szerint a tükrözésre előjelet váltanak.

32.13. Feladatok

1. Számítsuk ki az $\mathbb{R}^3$ $(1,3,2)$ és $(2,1,3)$ eleneinek a vektoriális szorzatát!

2. Mi az

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

antiszimmetrikus mátrixok kommutátorának a magja?

3. Bizonyítsuk be, hogy $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\langle \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \rangle = \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix}.$$

4. Egy 3×3-as $\boldsymbol{L}$ mátrix pontosan akkor ortogonális, ha $\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Ennek alapján döntsük el, milyen α illetve β valós számra lehet

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

ortogonális. Számítsuk ki az $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2$ és a $\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_2$ vektorokat, ahol $\boldsymbol{e}_1$ és $\boldsymbol{e}_2$ az első két standard bázisvektor $\mathbb{R}^3$-ban.

5. Igazoljuk, hogy ha $\boldsymbol{A} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$, akkor $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^2) = \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$.

6. Mutassuk meg, hogy a $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ bázis $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ reciprok vektorrendszerét (lásd 31.11.) az

$$\boldsymbol{r}_1 := \frac{\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3}{\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)}, \quad \text{stb.}$$

formulával adhatjuk meg.

33. Minkowski-féle vektorterek

33.1. Definíció *A* $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ *pszeudo-euklideszi vektorteret* ***Minkowski-félének*** *nevezzük, ha* $\dim\mathbf{V} \geq 2$ *és* $\mathrm{neg}(\boldsymbol{h}) = 1$.

A Minkowski-féle vektorterek tipikus képviselője $(\mathbb{R}^{1+N}, \mathbb{R}, \boldsymbol{G})$, ahol $\boldsymbol{G}$ a 29. fejezetben $\boldsymbol{H}_1$-gyel jelölt bilineáris forma (itt célszerűen N helyett $1+N$-et veszünk, és a koordinátákat nullával kezdjük számozni):

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := -\xi_0\eta_0 + \sum_{k=1}^{N} \xi_k\eta_k.$$

Pontosabban, 29.7. szerint minden $1+N$ dimenziós Minkowski-féle vektortér izomorf a fentivel.

A következőkben $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g})$-vel jelölünk egy Minkowski-féle vektorteret. Az előbb mondottaknak megfelelő célszerűséggel $\mathbf{M}$ dimenzióját $(1+N)$-nek vesszük, ahol $N > 1$, és a $\boldsymbol{g}$-ortogonális bázisokat 0-tól N-ig indexeljük: $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$, és $\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 < \mathbf{0}$, $\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_k > 0$ ha $k = 1, \dots, N$. Az előző fejezetekben megszokott jelölésnek megfelelően $\boldsymbol{g}$-t – amelyet **Lorentz-szorzásnak** szokás hívni – is pontszorzással helyettesítjük, tehát $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Minden érvényben marad, természetesen, amit a pszeudo-euklideszi vektorterekről mondtunk, amelyek közül az egyik legfontosabb az

$$\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}} \equiv \mathbf{M}^\star$$

azonosítás. $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ természetes módon irányított (erre az irányításra vonatkoznak a következő pontban szereplő egyenlőtlenségek). Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $\mathbf{I}$ is irányított; a formulák, összefüggések – megfelelő fogalmazásban – enélkül is igazak, de körülményesebb volna leírni őket.

Az $\mathbf{I}$ irányítása miatt $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ pozitív elemeiből négyzetgyököt tudunk vonni, és így értelmezzük az $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$ **pszeudo-hosszát**:

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}|} \in \mathbf{I}_0^+.$$

A vektorok pszeudo-hosszára igaz, hogy

(i) $|\mathbf{0}| = \mathbf{0}$, de $|\boldsymbol{x}| = \mathbf{0}$ nem vonja maga után, hogy $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

(ii) $|\alpha\boldsymbol{x}| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$ minden α valós számra és $\boldsymbol{x}$ vektorra.

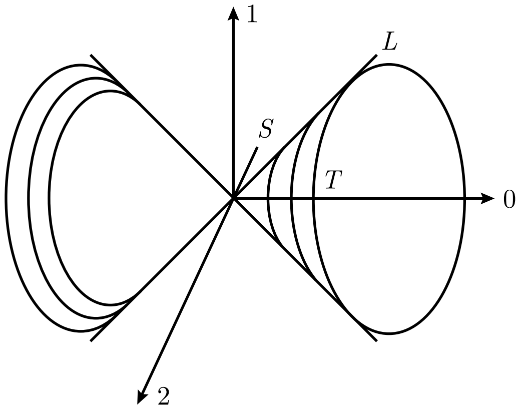
A háromszög-egyenlőtlenség, amely az euklideszi vektorok hosszának fontos tulajdonsága, a pszeudo-hosszra nem teljesül. Fizikában szokás $\boldsymbol{g}$-t metrikának nevezni, de a félreértések elkerülése érdekében jobb, ha kerüljük ezt az elnevezést. Ugyanis a metrika szóhoz a szokásos távolságfogalmat kapcsoljuk, amelyiknek alapvető tulajdonsága, hogy különböző pontok távolsága nem nulla (csak a nulla-vektor hossza nulla). és két pont között "legrövidebb út az egyenes" (teljesül a háromszög-egyenlőtlenség).

33.2. Vezessük be az

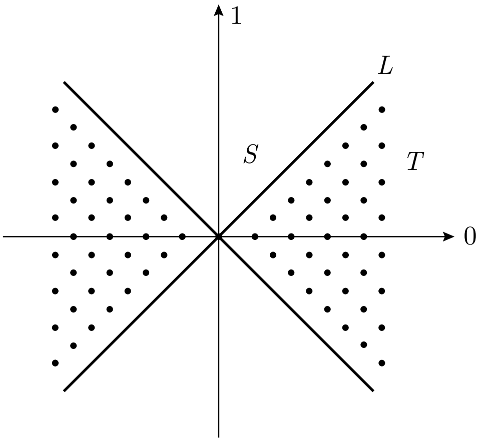
$$\begin{aligned} S &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} > \mathbf{0}\} & S_0 &:= S \cup \{\mathbf{0}\}, \\ T &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} < \mathbf{0}\} & T_0 &:= T \cup \{\mathbf{0}\}, \\ L_0 &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} & L &:= L_0 \setminus \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

jelöléseket. A fizikai alkalmazásból kölcsönvett szavakkal élve S_0, T és L elemeit rendre **térszerűnek**, **időszerűnek** és **fényszerűnek** nevezzük.

Jól szemléltethetjük ezeket a halmazokat az $N = 2$ és az $N = 1$ esetben (lásd a 7. és 8. ábrát).



7. ábra



8. ábra

Mint ezek az ábrák is jól mutatják, de közvetlenül is belátható, hogy S_0, T_0 és L_0 egyike sem lineáris altér.

33.3. Ha $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$, akkor

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}} := \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$$

N dimenziós lineáris altér, hiszen ez az $\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ lineáris leképezés magja, és ez a lineáris leképezés a $\boldsymbol{g}$ nemdegeneráltsága miatt szürjekció. Euklideszi vektortérben hasonló formulával épp az $\boldsymbol{x}$-re merőleges hipersíkot határoztuk meg. Az euklideszi eset jól illik a fizikai terünkhöz szokott szemléletünköz: vektor, és a rá merőleges sík. Itt azonban vigyáznunk kell: előfordulhat, hogy $\boldsymbol{x}$ benne van $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$-ben!

$\boldsymbol{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}} \times \mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$-re – amelyet $\boldsymbol{g}_x$-szel jelölünk – szimmetrikus bilineáris leképezés; azonban attól függően, $\boldsymbol{x}$ az S, a T vagy az L eleme, különböző tulajdonságokkal rendelkezik.

(i) Legyen $\boldsymbol{x} \in S$. Ekkor $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, tehát $\boldsymbol{x} \notin \mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$. $\mathbf{M}_x$-ben van $\boldsymbol{g}_x$-ortogonális bázis, ehhez hozzávéve $\boldsymbol{x}$-et, $\boldsymbol{g}$-ortogonális bázist kapunk $\mathbf{M}$-ben. Mivel $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} > 0$, a $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$-beli $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}$-ortogonális bázis egy eleme a T-ben van, a többi az S-ben van. Következésképpen $N = 1$ esetén $(\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{I}, -\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}})$ egy dimenziós eudklideszi vektortér, $N > 1$ esetén pedig $(\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}})$ N dimenziós Minkowski-féle vektortér.

(ii) Legyen $\boldsymbol{x} \in T$. Ekkor $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} < \mathbf{0}$, tehát $\boldsymbol{x} \notin \mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$. $\mathbf{M}_x$-ben van $\boldsymbol{g}_x$-ortogonális bázis, ehhez hozzávéve $\boldsymbol{x}$-et, $\boldsymbol{g}$-ortogonális bázist kapunk $\mathbf{M}$-ben. Mivel $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} < 0$, a $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$-beli $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}$-ortogonális bázis minden eleme az S-ben van. Következésképpen $(\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}})$ N dimenziós euklideszi vektortér.

(iii) Ha $\boldsymbol{x} \in L$, akkor $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, tehát $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$. Az előbb bevált gondolatmenet most haszontalan; $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}$ degenerált, ugyanis $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}$. Tehát $(\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}})$ még csak nem is pszeudo-euklideszi vektortér. Könnyen megmutathatjuk azt a fontos tényt, hogy $\mathbf{M}_x$-nek minden $\boldsymbol{x}$-szel nem párhuzamos eleme az S-ben van. Legyen ugyanis $\boldsymbol{e}_0 \in T$. Ekkor az (ii) szerint az $\boldsymbol{e}_0$-ra $\boldsymbol{g}$-ortogonális elemek térszerűek, tehát $\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Ezért $\boldsymbol{e}_1 := \dfrac{\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0}{\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{x}} x - \boldsymbol{e}_0$ jól értelmezett, és az S eleme, $\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 > \mathbf{0}$. Egészítsük ki $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1\}$-et $\boldsymbol{g}$-ortogonális bázissá $\mathbf{M}$-ben: $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_N\}$. Mivel $\boldsymbol{x}$ az $\boldsymbol{e}_0$ és $\boldsymbol{e}_1$ lineáris kombinációja, $\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_N$ – az S elemei – mindegyike benne van $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$-ben. Ezért $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_N\}$ a $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$-nek $\boldsymbol{g}_x$-ortogonális bázisa, ami egyben azt is igazolja, hogy hogy $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}} \setminus \mathbb{R}\boldsymbol{x} \subset S$, ugyanis
$$\left(\alpha \boldsymbol{x} + \sum_{i=2}^{N} \alpha_i \boldsymbol{e}_i\right) \cdot \left(\alpha \boldsymbol{x} + \sum_{i=2}^{N} \alpha_i \boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=2}^{N} \alpha_i^2 \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i \geq \mathbf{0}.$$

Jegyezzük meg: ha $\boldsymbol{x} \in S \cup T$, akkor $\mathbb{R}\boldsymbol{x}$ és $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$ kiegészítő alterek, amelyek $\boldsymbol{g}$-ortogonálisak egymásra. Ha $\boldsymbol{x} \in L$, akkor $\mathbb{R}\boldsymbol{x} \subset \mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$ és sem $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$-nek, sem $\mathbb{R}\boldsymbol{x}$-nek nincs $\boldsymbol{g}$-ortogonális kiegészítője.

Mivel az $\mathbf{M}$ minden N dimenziós altere $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$ alakú valamilyen $\boldsymbol{x}$-szel, megállapíthatjuk az előzőekben mondottak alapján:

– S_0-ban vannak N dimenziós alterek,

– T_0-ban és L_0-ban legfeljebb egy dimenziós altér lehet,

– kölcsönösen egyértelmű megfeleletetés létesíthető az S_0-beli N dimenziós alterek és a T_0-beli egy dimenziós alterek között úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett alterek $\boldsymbol{g}$-ortogonálisak egymásra.

Végül kiemeljük azt a továbbiakban gyakran használt tényt, ami az (ii)-ből következik, hogy

– ha $\boldsymbol{x} \in T$ és $\boldsymbol{y} \in T \cup L$, akkor $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$.

33.4. A most következő egyenlőtlenség nagy jelentőségű összefüggések alapjául szolgál.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in T$. Ekkor*

$$2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z})(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x}) \leq (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z})^2(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z})^2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) < \mathbf{0},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamos egymással.

Bizonyítás A $\boldsymbol{c} := \dfrac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}}{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ vektor $\boldsymbol{g}$-ortogonális $\boldsymbol{z}$-re, így $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} > \mathbf{0}$ és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$. Ebből egyszerűen adódik a kívánt összefüggés.

33.5. Minden S_0-beli lineáris altér a $\boldsymbol{g}$ leszűkítésével euklideszi vektortér, tehát ott $\boldsymbol{g}$ a szokásos tulajdonságú hosszt és távolságot származtatja. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az S_0-beli alterekre igaz ez, és nem az egész S_0-ra! Ugyanis ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S_0$, akkor előfordulhat, hogy az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ generálta lineáris altér nincs benne S_0-ban, és ilyen $\boldsymbol{x}$-re és $\boldsymbol{y}$-ra sem a Cauchy–Schwartz-féle egyenlőtlenség sem a háromszög-egyenlőtlenség nem feltétlenül teljesül (lásd a 33.12.2. feladatot).

Az időszerű vektorokra viszont az alábbi "fordított Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség" igaz.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in T$. Ekkor*

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \geq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| > 0,$$

és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamos egymással.

Bizonyítás Az előző pont egyenlőtlenségébe $\boldsymbol{z}$ helyébe $\boldsymbol{x}$-et téve majd a negatív $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$-szel elosztva megkapjuk a kívánt összefüggést.

33.6. Definíció *Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ időszerű vektor **azonos nyilú**, ha $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} < \mathbf{0}$.*

Állítás *(i) Azonos nyilúnak lenni ekvivalencia-reláció T-n, és két ekvivalencia-osztály van.*

(ii) Mindkét ekvivalencia-osztály nyílt konvex kúp.

Bizonyítás Azonos nyilúnak lenni reflexív és szimmetrikus reláció. Tranzitív is a 33.4. formulája következtében.

Ha $\boldsymbol{x} \in T$, akkor $-\boldsymbol{x} \in T$, de $\boldsymbol{x}$ és $-\boldsymbol{x}$ nem azonos nyilúak. Viszont T bármely $\boldsymbol{y}$ eleme az $\boldsymbol{x}$-szel vagy a $-\boldsymbol{x}$-szel azonos nyilú, hiszen $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, tehát két ekvivalencia-osztály van.

Legyenek $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ a T-nek azonos nyilú elemei és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$, $\alpha + \beta \neq 0$. Ekkor

$$(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) \cdot (\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha^2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2\alpha\beta\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \beta^2\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} < 0,$$

tehát $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in T$, továbbá

$$\boldsymbol{x} \cdot (\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} < \mathbf{0},$$

vagyis $\boldsymbol{x}$ és $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ azonos nyilú. Ezzel beláttuk, hogy egy azonos nyilú osztály konvex kúp.

A kúpok nyíltságára vonatkozóan az analízis következő ismert tényeire utalunk:
– véges dimenziós vektortéren megadható norma, és bármely két norma ekvivalens egymással, tehát a nyíltság fogalma értelmes anélkül, hogy konkrétan megadnánk normát,
– véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezések folytonosak,
– nyílt halmaznak folytonos leképezés általi őspéke nyílt.

Az $\boldsymbol{x} \in T$ ekvivalencia-osztálya az $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^+$ nyílt halmaznak az $\mathbf{M} \to \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$, $\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ lineáris leképezés általi ősképe.

33.7. A fordított Cauchy–Shwartz-egyenlőtlenségből azonos nyilú elemekre a "fordított háromszög-egyenlőtlenség" következik.

Állítás *Legyenek $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ a T-nek azonos nyilú elemei. Ekkor*

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \geq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|,$$

és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamosak.

Bizonyítás Az előző állítás szerint ekkor $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ is a T eleme, ezért

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = -\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \geq |\boldsymbol{x}|^2 + 2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}|^2 = (|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|)^2,$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamosak.

33.8. Abból, hogy T felbontható két diszjunkt kúp egyesítésére, következik, hogy ugyanez igaz L-re is.

Tudjuk, ha $\boldsymbol{x} \in T$ és $\boldsymbol{y} \in L$, akkor $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$.

Azt állítjuk, hogy ha $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in T$ azonos nyilúak és $\boldsymbol{y} \in L$, akkor $\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}$ és $\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{y}$ azonos előjelűek. Tegyük fel ugyanis, hogy ellenkező előjelűek; ekkor a hányadosuk -1-szerese pozitív szám, tehát $\boldsymbol{z} := \boldsymbol{x}_1 + \left(-\dfrac{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}_2\right)$ a T-nek eleme és $\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, ami lehetetlen.

Jelölje $T^{\rightarrow}$ és $T^{\leftarrow}$ az azonos nyilúnak lenni két ekvivalencia-osztályát T-ben. Az imént mondottak értelmében definiálhatjuk az

$$L^{\rightarrow} := \{\boldsymbol{y} \in L| \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} < \mathbf{0}, \boldsymbol{x} \in T^{\rightarrow}\}, \quad L^{\leftarrow} := \{\boldsymbol{y} \in L| \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} < \mathbf{0}, \boldsymbol{x} \in T^{\leftarrow}\}$$

halmazokat, amelyek nyilvánvalóan diszjunkt, nulla csúcsú kúpok (nem konvexek!), és $L^{\rightarrow} \cup L^{\leftarrow} = L$.

Az analízis fogalmaival szemléletes képet kaphatunk a mondottakról. Azt kell az előzőeken túl felidéznünk, hogy véges dimenziós vektortéren adott bilineáris forma is folytonos. Ezért S és T diszjunkt nyílt halmazok, L_0 pedig zárt halmaz. Mivel $S \cup T \cup L_0 = \mathbf{M}$, az igaz, hogy L_0 mind az S mind a T határpontjainak az összessége; szokásos jelöléssel $\partial S = \partial T = L_0$. Továbbá $L^{\rightarrow} := \partial T^{\rightarrow} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $L^{\leftarrow} := \partial T^{\leftarrow} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

33.9. A $\boldsymbol{g}$ Lorentz-szorzás vagy az $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g})$ Minkowski-tér **nyílirányításának** a T azonos nyilú elemeinek egy ekvivalencia-osztályát nevezzük. **Nyílirányított** a $\boldsymbol{g}$ illetve az $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g})$, ha meg van adva egy nyílirányítása.

Pontosabban a következőképpen fogalmazhatunk: $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g}, w)$ nyílirányított Minkowski-féle vektortér, ha $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g})$ Minkowski-féle vektortér és w a $\boldsymbol{g}$ nyílirányítása. Ugyanúgy, mint a vektorterek irányításával kapcsolatban, e pontos meghatározás helyett az előző egyszerűbb szóhasználattal élünk.

Pozitív nyilúnak vagy **pozitívnak** (a fizikából kölcsönvett szóval **jövőszerűnek**) mondjuk a nyílirányított Minkowski-térben a T elemét (időszerű vektort), ha benne van a választott ekvivalencia-osztályban.

33.10. Tekintsük az $(\mathbb{R}^{1+N}, \mathbb{R}, \boldsymbol{G})$ Minkowski-teret. A 29.5-ben mondottaknak megfelelően a lenn-fenn indexezést használjuk az $\mathbb{R}^{1+N}$ elemeinek és $(\mathbb{R}^{1+N})^{\star}$ elemeinek a megkülönböztetésére, és a két vektortér azonosítását az indexek áthelyezésével fejezzük ki. Tehát $(\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^N) \in \mathbb{R}^{1+N}$, és a neki megfelelő duálisbeli elem $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N)$, ahol $\xi_0 := -\xi^0$, $\xi_k := \xi^k$ $(k = 1, \ldots, N)$.

A formulákat könnyen kezelhetővé írhatjuk át a

$$g_{ik} := g^{ik} := \begin{cases} -1 & \text{ha } i = k = 0, \\ 1 & \text{ha } i = k = 1, \ldots, N, \\ 0 & \text{ha } i \neq k \end{cases}$$

bevezetésével és az Einstein-féle összegzési szabállyal:

$$\xi^k = g^{ik}\xi_k, \qquad \xi_k = g_{ik}\xi^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, N).$$

Így tehát

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \xi_k \eta^k = g_{ik}\xi^i\eta^k.$$

Az $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^{1+N} \to \mathbb{R}^{1+N}$ lineáris leképezés (mátrix) Lorentz-adjungáltja ($\boldsymbol{G}$-adjungáltja)

$$\boldsymbol{A}^* = \hat{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{A}^{\star}\hat{\boldsymbol{G}},$$

ahol $\boldsymbol{A}^{\star}$ a mátrix transzponáltja, $\hat{\boldsymbol{G}}$ az a diagonális mátrix, amelynek a nulladik tagja -1, a többi 1; azaz értelemszerű jelöléssel

$$(\alpha^*)^l_j = g^{lk}\alpha^i{}_k g_{ij}.$$

Még szemléletesebben: a mátrixot az

$$\alpha := \alpha^0{}_0, \quad \boldsymbol{\mu} := (\alpha^0{}_1, \dots, \alpha^0{}_N) \quad \boldsymbol{\nu} := (\alpha^1{}_0, \dots, \alpha^N{}_0),$$

$$\boldsymbol{\Gamma} := (\alpha^i{}_k \mid i, k = 1, \dots, N)$$

jelölésekkel blokkokba írva

$$\begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\nu} & \boldsymbol{\Gamma} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \alpha & -\boldsymbol{\nu} \\ -\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\Gamma}^\star \end{pmatrix}.$$

33.11. Az $\mathbf{I}$ pozitív $\boldsymbol{s}$ elemére normált $\mathbf{M}$-beli $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ irányított $\boldsymbol{g}$-ortogonális bázis duálisa az $\mathbf{M}^\star \equiv \dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}$ azonosításban $\left(-\dfrac{\boldsymbol{e}_0}{\boldsymbol{s}^2}, \dfrac{\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{s}^2}, \dots, \dfrac{\boldsymbol{e}_N}{\boldsymbol{s}^2}\right)$. Éredemes itt is bevezetni az $\boldsymbol{e}^0 := -\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}^k := \boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, \dots, N)$ jelölést. Ennek a bázisnak megfelelő koordinátázás homotetikus $\boldsymbol{g} - \boldsymbol{G}$-ortogonális leképezés $\mathbf{M}$ és $\mathbb{R}^{1+N}$ között, amelyben az $\boldsymbol{x}$ vektor koordinátái

$$\left(-\frac{\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{s}^2}, \frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{s}^2} \,\middle|\, i = 1, \dots, N\right) = \left(\frac{\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{s}^2} \,\middle|\, i = 0, 1, \dots, N\right).$$

Ilyen koordinátázásban “minden a helyén van”. Az $\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{N} \xi_i \boldsymbol{e}_i$ és $\boldsymbol{y} = \sum_{i=0}^{N} \eta_i \boldsymbol{e}_i$ vektorok pontszorzatát a kordinátáik Lorentz-szorzatával számíthatjuk ki:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{s}^2 \left(-\xi_0 \eta_0 + \sum_{i=1}^{N} \xi_i \eta_i\right) = \sum_{k=0}^{N} \xi_k \eta^k.$$

Az $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{M})$ $\boldsymbol{g}$-adjungáltjának a mátrixa az $\boldsymbol{A}$ mátrixának a $\boldsymbol{G}$-adjungáltja.

Ha $(\boldsymbol{e}'_1 \dots, \boldsymbol{e}'_N)$ az $\boldsymbol{s}'$-re normált ortogonális bázis, akkor a “vesszős” bázisról a “vesszőtlenre” való áttérés mátrixa

$$\left(\frac{\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}'_i}{\boldsymbol{s}^2} \,\middle|\, k, i = 0, 1, \dots, N\right).$$

Nem ilyen szép a helyzet, ha nem $\boldsymbol{g}$-ortogonális bázis szerint koordinátázunk. Legyen $(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ az $\mathbf{M}$ akármilyen bázisa. Ekkor például az $\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{N} \xi^i \boldsymbol{v}_i$ és $\boldsymbol{y} = \sum_{i=0}^{N} \eta^i \boldsymbol{v}_i$ vektorok pontszorzatát nem egyszerűen a kordinátáik Lorentz-szorzatával számíthatjuk ki:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=0}^{N} (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_k) \xi^i \eta^k.$$

33.12. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^{1+2}$ Minkowski-térben a $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ és $(0,0,1)$ vektorokból kiindulva nem vihető végig a Gram–Schmidt-ortogonalizáiciós eljárás (lásd 31.4.).

2. Legyen $0 < \alpha < 1$. Az $(1, 1+\alpha)$ és az $(1, -(1+\alpha))$ vektorok térszerűek az $\mathbb{R}^{1+1}$ Minkowski-féle vektortérben, de nem teljesítik sem a Cauchy–Schwartz-féle egyenlőtlenséget, sem a háromszög-egyenlőtlenséget.

3. Legyen $\boldsymbol{e} \in S \cup T$. Igazoljuk, hogy $\boldsymbol{P} := \dfrac{\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}}$ az $\boldsymbol{e}$ irányába történő $\boldsymbol{g}$-ortogonális vetítés, azaz $\boldsymbol{Px}$ párhuzamos $\boldsymbol{e}$-vel és $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Px}$ $\boldsymbol{g}$-ortogonális $\boldsymbol{e}$-re minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$ esetén.

34. Antiszimmetrikus leképezések Minkowski-térben

34.1. Ebben a fejezetben $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g})$ olyan Minkowski-féle vektorteret jelöl, amelyre

$$\dim \mathbf{M} = 4,$$

és bevezetjük a

$$\mathbf{H} := \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I}}$$

jelet. A $\boldsymbol{g}$ Lorentz-szorzás valós értékű bilineáris formát ad $\mathbf{H}$-n (lásd 29.1.), amelyet megállapodásunk szerint szintén pontszorzással jelölünk. Ezzel $\mathbf{H}$ is négy dimenziós Minkowski-tér, amelyre értelemszerűen minden alkalmazható, amit eddig $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g})$-ről elmondtunk.

A fizikai alkalmazások kedvéért tegyük fel, hogy $\boldsymbol{g}$ nyílirányított; ez csak bizonyos fogalmazási könnyebbséget jelent, lényeges megszorítást nem.

Vezessük be a

$$V(1) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H} \mid \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = -1, \boldsymbol{u} \text{ pozitív nyilú}\}$$

és $\boldsymbol{u} \in V(1)$ esetére a

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{u}} := \{\boldsymbol{n} \in \mathbf{H} \mid \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0\}$$

jelölést.

$\mathbf{H}_{\boldsymbol{u}}$ három dimenziós altér, amelyen a pontszorzás pozitív definit, tehát $\mathbf{H}_{\boldsymbol{u}}$ három dimenziós euklideszi tér.

34.2. Most $A(\boldsymbol{g}) \equiv \mathbf{H} \wedge \mathbf{H}$ (lásd 30.5.) hat dimenziós vektortér; ezen adott egy nemdegenerált szimmetrikus bilineáris forma (lásd 30.7.), amelynek az 1/2-szeresét célszerű használni:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AB}).$$

Ezzel

$$|\boldsymbol{A}| := \sqrt{|\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}|}.$$

Ha $(\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, n_3)$ a $\mathbf{H}$-nak $\boldsymbol{g}$-ortonormált bázisa, akkor

$$\boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_1, \qquad \boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_2 \qquad \boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_3,$$

$$\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2, \qquad \boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3 \qquad \boldsymbol{n}_3 \wedge \boldsymbol{n}_1$$

$\bullet$-ortogonális bázis $\mathbf{H} \wedge \mathbf{H}$-ban. Következésképpen $\mathbf{H} \wedge \mathbf{H}$ minden eleme

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_k \boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_k + \sum_{k=1}^{3} \sum_{0<i<k} \alpha_{ik} \boldsymbol{n}_i \wedge \boldsymbol{n}_k$$

alakú. Az $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ térszerű vektorok kifeszítette lineáris altér három dimenziós euklideszi tér, ezért a 32.4.-ben mondottak szerint van olyan $\boldsymbol{m}$ és $\boldsymbol{n}$ egymásra és $\boldsymbol{n}_0$-ra $\boldsymbol{g}$-ortogonális egységnyi hosszú vektor, és egy β valós szám, hogy a fenti összeg második tagja $\beta \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}$-nel egyenlő. Az első tagban pedig bevisszük az összegzést a tenzorszorzás alá; az $\boldsymbol{u} := \pm \boldsymbol{n}_0$ átnevezéssel így jutunk a következő eredményre.

Állítás *Legyen* $\boldsymbol{A} \in \mathbf{H} \wedge \mathbf{H}$. *Ekkor minden* $\boldsymbol{u} \in V(1)$, *esetén létezik* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbf{H}_{\boldsymbol{u}}$, $|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{m}| = |\boldsymbol{n}| = 1$, $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ *úgy, hogy*

$$\boldsymbol{A} = \alpha \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r} + \beta \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}, \tag{$*$}$$

és ekkor

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} = -\alpha^2 + \beta^2.$$

34.3. Állítás *Legyen* $\boldsymbol{A} \in \mathbf{H} \wedge \mathbf{H}$ *az előző pont* $(*)$ *formájában adva.* $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}\}$ *pontosan akkor, ha* $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, *és* $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ *lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, és $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ lineárisan függetlenek, és legyen $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$, azaz

$$\alpha(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{u} - \alpha(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{r} + \beta(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{m} - \beta(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{n} = \mathbf{0},$$

Ekkor persze $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ is lineárisan függetlenek, tehát $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, azaz $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{g}$-ortogonális négy lineárisan független vektorra, amiből a $\boldsymbol{g}$ nem elfajultsága miatt $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ következik, azaz $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}\}$.

Ha $\alpha = 0$, akkor $\boldsymbol{u} \otimes \mathbf{I} \subset \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$, ha $\beta = 0$, akkor $\boldsymbol{m} \otimes \mathbf{I} \subset \mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$.

Ha $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ lineárisan összefüggők, akkor $\boldsymbol{r}$ benne van az egymásra merőleges $\boldsymbol{m}$ és $\boldsymbol{n}$ kifeszítette síkban. Mivel ebben a síkban bármely egységnyi hosszú, egymásra merőleges $\boldsymbol{m}'$ és $\boldsymbol{n}'$ vektorra $\boldsymbol{m}' \wedge \boldsymbol{n}' = \pm \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}$ áll fönn, az általánosság megszorítása nélkül vehetjük úgy, hogy $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$; így

$$\boldsymbol{A} = (\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{m}) \wedge \boldsymbol{n}. \tag{$*$}$$

Van olyan nem nulla vektor, amely $\boldsymbol{g}$-ortogonális mind $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{m}$-re, mind $\boldsymbol{n}$-re, és az ilyen vektor benne van $\boldsymbol{A}$ magjában, tehát $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} \neq \{\boldsymbol{0}\}$. ■

Megjegyezzük, hogy a fenti formula akkor is helytálló, ha $\alpha = 0$ vagy $\beta = 0$, vagyis az is igaz: $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} \neq \{\boldsymbol{0}\}$ pontosan akkor, ha minden $\boldsymbol{u} \in V(1)$ esetén létezik $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbf{H}_{\boldsymbol{u}}$, $|\boldsymbol{m}| = |\boldsymbol{n}| = 1$, $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, és a $(*)$ teljesül.

34.4. Állítás *Legyen $\boldsymbol{A} \in \mathbf{H} \wedge \mathbf{H}$, $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$. Ekkor*

(i) $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} > 0$ pontosan akkor, ha van olyan $\boldsymbol{u} \in V(1)$ és $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbf{H}_{\boldsymbol{u}}$ egymásra merőleges egységvektorok, hogy

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n}$$

(azaz $\boldsymbol{A}$ két egymásra $\boldsymbol{g}$-ortogonális térszerű vektor antiszimmetrikus tenzorszorzata);

(ii) $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} < 0$ pontosan akkor, ha van olyan $\boldsymbol{u} \in V(1)$ és $\boldsymbol{r} \in \mathbf{H}_{\boldsymbol{u}}$, hogy

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r}$$

(azaz $\boldsymbol{A}$ egy időszerű és egy rá $\boldsymbol{g}$-ortogonális térszerű vektor antiszimmetrikus tenzoszorzata);

(iii) $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} = 0$, $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ pontosan akkor, ha van olyan $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{r} \in \mathbf{H}$, $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w} = 0$, $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = 1$, $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{r} = 0$, hogy

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{r}$$

(azaz $\boldsymbol{A}$ egy fényszerű és egy rá $\boldsymbol{g}$-ortogonális térszerű vektor antiszimmetrikus tenzoszorzata).

Bizonyítás Írjuk az előző pont $(*)$ formuláját most így: $\boldsymbol{A} = (\alpha \boldsymbol{u}' + \beta \boldsymbol{m}') \wedge \boldsymbol{n}'$; ekkor $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} = -\alpha^2 + \beta^2$.

(i) Ha $-\alpha^2 + \beta^2 > 0$, akkor az

$$\boldsymbol{u} := \frac{\beta \boldsymbol{u}' + \alpha \boldsymbol{m}'}{-\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \boldsymbol{m} := \frac{\alpha \boldsymbol{u}' + \beta \boldsymbol{m}'}{-\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \boldsymbol{n} := \boldsymbol{n}'$$

vektorok megfelelenek a követelményeknek.

(ii) Ha $-\alpha^2 + \beta^2 < 0$, akkor az

$$\boldsymbol{u} := \frac{\beta \boldsymbol{u}' + \alpha \boldsymbol{m}'}{\alpha^2 - \beta^2}, \qquad \boldsymbol{r} := \boldsymbol{n}'$$

vektorok megfelelenek a követelményeknek.

(iii) Ha $-\alpha^2 + \beta^2 = 0$, akkor

$$\boldsymbol{w} := \alpha \boldsymbol{u}' + \beta \boldsymbol{m}', \qquad \boldsymbol{r} := \boldsymbol{n}'. \blacksquare$$

Eredményünkből rögtön következik, hogy a következő két kijelentés egyenértékű:

– $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} \neq \{\boldsymbol{0}\}$ és $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} > 0$,

– van olyan $\boldsymbol{u} \in V(1)$, amelyre $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Az elsőből a második a fentiek szerint nyilvánvalóan következik. Ha viszont a második igaz, akkor $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A} \neq \{\boldsymbol{0}\}$, ezért $\boldsymbol{A}$ a fenti (i)-(iii) formájú lehet. Az (i) felel meg az első kijelentésnek, Tegyük fel, hogy a (ii) forma igaz, vagyis (most alkalmasan "vesszőzést" használva) $\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{r}$. Ekkor $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$, ami $\boldsymbol{u}'$ és $\boldsymbol{r}$ lineáris függetlensége miatt csak úgy lehet, hogy $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u} = 0$, de ez lehetetlen, mert két időszerű vektor – $\boldsymbol{u}'$ és $\boldsymbol{u}$ – nem lehet $\boldsymbol{g}$-ortogonális egymásra. Hasonlóan zárhatjuk ki az (iii) lehetőséget, mert egy időszerű és egy fényszerű vektor nem lehet $\boldsymbol{g}$-ortogonális egymásra.

34.5. Azt már a legelején feltettük az $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \boldsymbol{g})$ Minkowski-féle vektortérrel kapcsolatban, hogy $\mathbf{I}$ irányított, mert így tudtuk a vektorok pszeudohosszát értelmezni. Ez nem volt lényeges feltétel, mert enélkül is értelmes a vektorok pszeudohossz-négyzete, amivel mindent meg tudtunk volna fogalmazni, csak egy kicsit körülményesebben. Ugyancsak az egyszerűbb fogalmazás érdekében feltettük azt is, hogy $\boldsymbol{g}$ nyílirányított.

Most feltesszük, hogy $\mathbf{M}$ is irányított. Ekkor $\mathbf{H}$ is irányított, és megadható az

$$\boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3$$

Levi–Civita-tenzor, ahol $(\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)$ a $\mathbf{H}$-nak pozitívan irányított $\boldsymbol{g}$-ortonormált bázisa.

Tudjuk, hogy a Levi–Civita-tenzor a

$$\boldsymbol{J} : \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} \to \mathbf{H} \wedge \mathbf{H}, \qquad \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n} \mapsto \boldsymbol{\epsilon}(\cdot, \cdot, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$$

képlettel meghatározta lineáris bijekciót létesíti (lásd 30.10.).

Ha $(\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)$ pozitívan irányított $\boldsymbol{g}$-ortonormált bázis $\mathbf{H}$-ban, akkor

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_1) = \boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3, \quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_2) = \boldsymbol{n}_3 \wedge \boldsymbol{n}_1 \quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_3) = \boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2,$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2) = -\boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_3, \quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{n}_3 \wedge \boldsymbol{n}_1) = -\boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_2 \quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3) = -\boldsymbol{n}_0 \wedge \boldsymbol{n}_1.$$

Ebből is megállapíthatjuk azt a 30.10. állításból is következő tényt, hogy $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A})) = -\boldsymbol{A}$ minden $\boldsymbol{A} \in \mathbf{H} \wedge \mathbf{H}$ esetén.

Továbbá – az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ szerepére az $\boldsymbol{n}_i \wedge \boldsymbol{n}_k$ $(0 \le i < k = 0, 1, 2, 3)$ báziselemeket véve – az

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{J}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{A}) \bullet \boldsymbol{B}$$

formulát kapjuk, amiből viszont

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A}) \bullet \boldsymbol{J}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A})) \bullet \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$$

minden $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{H} \wedge \mathbf{H}$ esetén.

34.6. Az $(\mathbb{R}^{1+3}, \mathbb{R}, \boldsymbol{G})$ Minkowski-tér esetén 33.10. alapján egy mátrix pontosan akkor $\boldsymbol{G}$-antiszimmetrikus, ha

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_3 & 0 & -\beta_1 \\ \alpha_3 & -\beta_2 & \beta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

alakú. Könnyen adódik, hogy

$$\boldsymbol{J}\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_3 & 0 & -\beta_1 \\ \alpha_3 & -\beta_2 & \beta_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ \beta_2 & -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

34.7. Feladatok

1. Legyen $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$ fényszerű. Ekkor 33.3.(iii) szerint van az $\mathbf{M}_{\boldsymbol{x}}$-ben $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ $\boldsymbol{g}$-ortogonális bázis, amelyre $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 =: \boldsymbol{s}^2 > \boldsymbol{0}$. Legyen

$$\boldsymbol{w} := \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{s}}, \quad \boldsymbol{n}_2 := \frac{\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{s}}, \quad \boldsymbol{n}_3 := \frac{\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{s}}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\{\boldsymbol{A} \in \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \{\alpha \boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3 + \beta_2 \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{n}_2 + \beta_3 \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{n}_3 \mid \alpha, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}\},$$

és az ilyen $\boldsymbol{A}$-ra $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} = \alpha^2$.

2. Az előző példa jelöléseivel: ha $\boldsymbol{y} \in \mathbf{M}_x$, akkor $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A})(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y})$.

3. Tekintsük a 34.6. szerinti $\boldsymbol{G}$-antiszimmetrikus mátrixot, és legyen $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\beta} := (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$.

– Ha $|\boldsymbol{\alpha}| < |\boldsymbol{\beta}|$, akkor a mátrix a 34.4. (i) tulajdonságú,
– ha $|\boldsymbol{\alpha}| > |\boldsymbol{\beta}|$, akkor a mátrix a 34.4. (ii) tulajdonságú,
– ha $|\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}| \neq 0$, akkor a mátrix a 34.4. (iii) tulajdonságú.

Találjuk meg a különféle esetekben a 34.4. szerinti vektorokat, amelyekből antiszimmetrikus tenzorszorzattal a mátrix előállítható.

35. Komplex skaláris szorzatos terek

35.1. Valós vektorterek komplexifikáltját sokszor alkalmazzuk elméleti és gyakorlati problémák megoldásánál. Különösen érdekes az euklideszi vektorterek komplexifikáltja.

Vegyünk egy $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \boldsymbol{b})$ euklideszi vektorteret. A $\boldsymbol{b}$ bilineáris leképezést ki tudjuk terjeszteni $\mathbf{E}_{\mathbb{C}} \times \mathbf{E}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{D}_{\mathbb{C}} \otimes \mathbf{D}_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-bilineáris leképezéssé is, szeszkilineáris leképezéssé is (lásd 28.6.). A szeszkilineáris kiterjesztéssel lehet átmenteni a komplexifikált vektortérre is a vektorok hosszának és merőlegességének a fogalmát. A

$$\boldsymbol{b}_{\mathbb{C}} : \mathbf{E}_{\mathbb{C}} \times \mathbf{E}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{D}_{\mathbb{C}} \otimes \mathbf{D}_{\mathbb{C}},$$

$$(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}(v, \boldsymbol{y}) + i\big((\boldsymbol{b}(u, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})\big)$$

szeszkilineáris kiterjesztés hermitikus és pozitív definit (lásd 18.8.)

A szokásos módon $\boldsymbol{b}_{\mathbb{C}}$-ből megadhatunk egy komplex értékű, pozitív definit hermitikus formát $\dfrac{\mathbf{E}_{\mathbb{C}}}{\mathbf{D}_{\mathbb{C}}} \times \dfrac{\mathbf{E}_{\mathbb{C}}}{\mathbf{D}_{\mathbb{C}}}$-n: $\dfrac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{d}}, \dfrac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{d}} \mapsto \dfrac{\boldsymbol{b}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})}{\boldsymbol{d}^2}$, amelyből $\boldsymbol{b}_{\mathbb{C}}$ rekonstruálható.

35.2. A mondottaknak megfelelően a következőkben azt vesszük, hogy adott egy véges dimenziós $\mathbf{Z}$ komplex vektortér – nem szükésgképpen valós vektortér komplexifikáltja –, és egy

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbb{C}, \quad (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) \mapsto \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \rangle$$

skaláris szorzat, azaz minden $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}$ esetén

S1) $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle \leq 0$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$,

S2) $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \rangle^*$,

SL) $\langle \boldsymbol{w}, \cdot \rangle$ lineáris leképezés.

Az S2 és SL tulajdonságok következménye, hogy minden $\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}$ esetén $\langle \cdot, \boldsymbol{z} \rangle$ konjugált lineáris leképezés.

Megemlítjük, hogy egy $\mathbf{Z}$ véges dimenziós komplex vektortéren nagyon sokféle skaláris szorzat vezethető be: ha adott egy $\{\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_N\}$ bázis, akkor a $(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_k) \mapsto \delta_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, N)$ hozzárendelés egyértelműen kiterjeszthető hermitikus szeszkilineáris leképezéssé (lásd 18.8.).

A skaláris szorzatra érvényes a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség, amelyet ugyanúgy lehet bizonyítani, mint a 31.2-ben:

$$|\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \rangle| \leq \|\boldsymbol{w}\| \|\boldsymbol{z}\|$$

minden $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}$ esetén, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\boldsymbol{w}$ és $\boldsymbol{z}$ párhuzamosak. Itt

$$\|\boldsymbol{z}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle}$$

a $\boldsymbol{z}$ vektor **hossza** vagy **normája**.

A norma alapvető tulajdonságai: a $\mathbf{Z}$ minden $\boldsymbol{w}$ és $\boldsymbol{z}$ elemére, valamint minden α komplex számra

N) $\|\boldsymbol{z}\| \geq 0$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$,

NP) $\|\alpha \boldsymbol{z}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{z}\|$,

NA) $\|\boldsymbol{w} + \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{w}\| + \|\boldsymbol{z}\|$.

A vektorok által bezárt szög általában nem értelmezhető; viszont a merőlegesség – ortogonalitás – fogalma ugyanaz, mint euklideszi vektorterek esetén: a $\boldsymbol{w}$ és $\boldsymbol{z}$ vektort **ortogonálisnak** nevezzük, ha $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \rangle = 0$.

Amint azt 18.8-ban elmondtuk, $\mathbf{Z}$-ben is létezik **ortonormált** $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_N\}$ bázis (ahol $N := \dim \mathbf{Z}$), azaz

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k \rangle = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots, N).$$

Ugyanúgy, mint 31.4-ben, megmutathatjuk, hogy bármely $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_N\}$ bázisból ortonormált bázist készíthetünk a Gram–Schmidt-ortogonalizációs eljárással:

$$\boldsymbol{z}_n := \boldsymbol{w}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{w}_n \rangle \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{e}_n := \frac{\boldsymbol{z}_n}{\|\boldsymbol{z}_n\|}$$

$$(n = 1, \ldots, N).$$

Ugyanúgy, mint euklideszi vektortereknél, ha H a $\mathbf{Z}$ nem üres részhalmaza, akkor a

$$H^{\perp} := \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z} \mid \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \rangle = 0, \, \boldsymbol{w} \in H\}$$

jelöléssel ugyanazokat az összefüggéseket mondhatjuk el, mint 31.5-ben. Például, ha $\mathbf{M}$ a $\mathbf{Z}$ lineáris altere, akkor $\mathbf{Z} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{M}^{\perp}$, továbbá $(\mathbf{M}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{M}$, és az $\boldsymbol{e}$ egységvektor (azaz $\|\boldsymbol{e}\| = 1$) irányába történő merőleges vetítés $\boldsymbol{z} \mapsto \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{z} \rangle \boldsymbol{e}$.

35.3. A $\mathbf{Z}$ duálisa azonosítható $\mathbf{Z}$-vel. Pontosabban a

$$J : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}^{\star}, \quad \boldsymbol{z} \mapsto \langle \boldsymbol{z}, \cdot \rangle$$

képlettel meghatározott leképezés konjugált lineáris bijekció; ezt a 29.3-ban mondottakhoz hasonlóan láthatjuk be.

Az $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_N\}$ ortonormált bázis duálisa ebben az azonosításban önmaga.

Az $\boldsymbol{A} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ lineáris leképezés **adjungáltja** az az $\boldsymbol{A}^* : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ lineáris leképezés, amelyet

$$\langle \boldsymbol{A}^* \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{A} \boldsymbol{z} \rangle \qquad (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{Z})$$

határoz meg. Könnyű belátni, hogy $\boldsymbol{A}^* = J^{-1}\boldsymbol{A}^\star J$, ahol $\boldsymbol{A}^\star$ az $\boldsymbol{A}$ transzponáltja.

Az előző formulából és a transzponáltra vonatkozó ismerteink alapján megállapíthatjuk, hogy minden $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{Z})$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ esetén

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*, \quad (\alpha\boldsymbol{A})^* = \alpha^*\boldsymbol{A}^*, \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*,$$

$$\det(\boldsymbol{A}^*) = (\det \boldsymbol{A})^*, \qquad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^*) = (\mathrm{Tr}\boldsymbol{A})^*,$$

és ha $\boldsymbol{A}$ bijekció, akkor $\boldsymbol{A}^*$ is az, és

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*.$$

Figyeljük meg, hogy itt a * jel két értelemben szerepel: egyrészt az adjungálást jelöli, másrészt a komplex konjugálást.

Végül ugyanúgy, mint 31.6-ban $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^*) = (\mathrm{Ran}\boldsymbol{A})^\perp$.

35.4. Az euklideszi terek szimmetrikus leképezéseinek a megfelelői az önadjungált leképezések. Az $\boldsymbol{S} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ lineáris leképezés **önadjungáltnak** nevezzük, ha $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S}$. Az önadjungált lineáris leképezések igen fontosak az alkalmazásokban. Hasonló a szerepük, mint a valós számoknak a komplex számok körében. Tetszőleges $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{Z})$ esetén $\boldsymbol{A}$ **valós** illetve **képzetes** része

$$\mathrm{Re}\boldsymbol{A} := \frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*}{2}, \quad \text{illetve} \quad \mathrm{Im}\boldsymbol{A} := \frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*}{2i}$$

önadjungált leképezések, és $\boldsymbol{A} = \mathrm{Re}\boldsymbol{A} + i\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$.

Az euklideszi terek ortogonális leképezéseinek a megfelelői az unitér leképezések. **Unitér** az $\boldsymbol{U} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{Z})$, ha $\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}^{-1}$. Az olvasóra bízzuk, mutassa meg, ez egyenértékű azzal, hogy $\boldsymbol{U}$ megtartja a skaláris szorzatot, azaz

$$\langle \boldsymbol{U}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{U}\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}\rangle \qquad (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}),$$

ez pedig azzal, hogy $\boldsymbol{U}$ izometrikus, azaz

$$\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{z}\| \qquad (\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}).$$

Ez utóbbi belátásához induljunk ki az

$$\langle \boldsymbol{U}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{z}), \boldsymbol{U}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{z})\rangle = \langle \boldsymbol{w}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}+\boldsymbol{z}\rangle,$$

$$\langle \boldsymbol{U}(\boldsymbol{w}+i\boldsymbol{z}), \boldsymbol{U}(\boldsymbol{w}+i\boldsymbol{z})\rangle = \langle \boldsymbol{w}+i\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}+i\boldsymbol{z}\rangle$$

egyenlőségekből.

35.5. Ha $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{Z})$ idempotens és önadjungált, azaz $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^*$, akkor – és csak akkor – $\boldsymbol{P}$ a $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P}$-re történő ortogonális vetítés, azaz minden $\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}$ esetén $\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ és $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ ortogonális egymásra.

Egyszerű tény, hogy a $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{Q}$ önadjungált projektorok értékkészlete pontosan akkor ortogonális egymásra, ha $\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{QP} = \mathbf{0}$. Ekkor azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{Q}$ **ortogonális egymásra**.

Állítás *Legyenek $\boldsymbol{P}_1, \dots, \boldsymbol{P}_n$ önadjungált projektorok. Ekkor $\boldsymbol{P} := \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i$ pontosan akkor önadjungált projektor, ha $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j = \mathbf{0}$ $(i, j = 1, \dots, n, i \neq j)$ (azaz a projektorok páronként ortogonálisak egymásra), és ebben az esetben $\boldsymbol{P}$ a $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_i$ projektora.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy ha a projektorok páronként ortogonálisak, akkor $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^*$, és az értékkészletek között a mondott összefüggés áll fönn.

Tegyük most fel, hogy $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^*$. Ragadjunk ki egy k indexet, és legyen $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_k$. Ekkor

$$\|\boldsymbol{z}\|^2 \geq \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}\|^2 = \langle \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{P}^*\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}\rangle =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{z}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{z}\|^2 \geq \|\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}\|^2 = \|\boldsymbol{z}\|^2,$$

és ebből az következik, hogy mindenütt egyenlőségnek kell állnia, azaz $\sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{z}\|^2 = \|\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{z}\|^2$ is teljesül, tehát minden $i \neq k$ esetén $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$. Ez épp azt jelenti, hogy $\boldsymbol{P}_i$ és $\boldsymbol{P}_k$ képtere ortogonális egymásra. ■

Megjegyezzük, az állítás érvényes euklideszi terekben (valós skaláris szorzatos terekben) is; ennek bizonyítását adtuk ki a 31.12.5. feladatban.

35.6. A véges dimenziós komplex skaláris szorzatos vektorterek tipikus képviselője $\mathbb{C}^N$ a

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle := \sum_{k=1}^{N} \xi_k^* \eta_k$$

skaláris szorzattal.

Könnyű ellenőrizni, hogy ha

$$\boldsymbol{A} = (\alpha_{ik} \mid i, k = 1, \dots, N),$$

akkor

$$\boldsymbol{A}^* = (\alpha_{ki}^* \mid i, k = 1, \dots, N),$$

vagyis a mátrix adjungáltja a mátrix transzponáltjának a konjugáltja.

Az $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ indexezett ortonormált bázisnak megfelelő

$$\boldsymbol{K} : \mathbf{Z} \to \mathbb{C}^N, \qquad \boldsymbol{z} \mapsto (\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{z}\rangle \mid k = 1, \dots, N)$$

koordinátázás unitér, azaz $\langle \boldsymbol{Kw}, \boldsymbol{Kz}\rangle_{\mathbb{C}^N} = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}\rangle$. Az $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{Z})$ mátrixa ebben a koordinátázásban

$$(\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{Ae}_k\rangle \mid i,k = 1,\dots,N).$$

Ilyen koordinátázásban "minden a helyén van": a vektorok skaláris szorzata egyenlő a koordinátáik skaláris szorzatával, egy lineáris léképezés adjungáltjának a mátrixa a mátrixának az adjungáltja stb.

35.7. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{Z})$, akkor $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ önadjungált.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\boldsymbol{A}_k \in \mathrm{Lin}(\mathbf{Z})$ $(k = 1,\dots,n)$ és $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}_k^*\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{0}$, akkor $\boldsymbol{A}_1 = \dots = \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{0}$.

3. Ha $\boldsymbol{A}$ önadjungált, akkor $\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}$ valós.

4. Jellemezzük azokat a 2×2-es komplex mátrixokat, amelyek mint $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ lineáris leképezések

(i) önadjungáltak,

(ii) unitérek.

5. Milyen $\boldsymbol{A} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ lineáris leképezés mellett lesz $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) \mapsto \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{Az}\rangle$ is skaláris szorzat?

6. Euklideszi terekben a szimmetrikus illetve az antiszimmetrikus lineáris leképezések lényegesen különbözők. Ezzel ellentétben, ha $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{Z})$ antiönadjungált, azaz $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}$, akkor $i\boldsymbol{A}$ önadjungált.

7. Legyen $\boldsymbol{A}$ lineáris leképezés egy euklideszi vektortérben. Igazoljuk, hogy $(\boldsymbol{A}^*)_{\mathbb{C}} = (\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}})^*$. Speciálisan tehát egy szimmetrikus illetve ortogonális leképezés komplexifikáltja önadjungált illetve unitér.

8. Legyen $\mathbf{N}$ valós skaláris szorzatos tér (euklideszi vektortér), és $\mathbf{Z} = \mathbf{N}_{\mathbb{C}}$. Bizonyítsuk be, hogy $\|\boldsymbol{z}^*\| = \|\boldsymbol{z}\|$, ahol $\boldsymbol{z}^*$ a $\boldsymbol{z}$ vektor komplex konjugáltja (lásd 28.2.). Közelebbről,

$$\|\boldsymbol{m} + i\boldsymbol{n}\|^2 = \|\boldsymbol{m} - i\boldsymbol{n}\|^2 = |\boldsymbol{m}|^2 + |\boldsymbol{n}|^2 \qquad (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbf{N}).$$

9. Legyen $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_N\}$ egy $\mathbf{V}$ komplex vektortér bázisa. Definiáljunk olyan skaláris szorzást $\mathbf{V}$-n, amelyre ez a bázis ortonormált.

VII. OPERÁTOROK SPEKTRÁLIS TULAJDONSÁGAI

Egy vektortérnek önmagába képező lineáris leképezéseit szokták **operátoroknak** is nevenzi. Most az egyszerűbb és rövidebb írásmód kedvéért mi is ezt az elnevezést használjuk.

Közelebbről: ebben a részben $\mathbf{V}$ adott *véges dimenziós* vektorteret jelöl, és $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ elemeit vizsgáljuk, amelyeket operátoroknak nevezünk; az egyszerűség kedvéért az

$$\mathbf{I} := \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$$

jelölést használjuk.

36. Invariáns alterek

36.1. Definíció *Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{M}$ *lineáris altér az* $\boldsymbol{A}$ *operátor* ***invariáns altere*** *vagy* $\mathbf{M}$ ***invariáns*** $\boldsymbol{A}$*-ra, ha* $\boldsymbol{A}[\mathbf{M}] \subset \mathbf{M}$.

Az $\mathbf{M}$ altér tehát akkor invariáns $\boldsymbol{A}$-ra, ha $\boldsymbol{A}$ az $\mathbf{M}$-beli elemeket $\mathbf{M}$-be képezi. Figyeljünk föl arra, ezzel nem zártuk ki annak a lehetőségét, hogy $\boldsymbol{A}$ az $\mathbf{M}$-en kívüli elemeket is képezhet $\mathbf{M}$-be.

Világos, hogy $\mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$ az $\boldsymbol{A}$ invariáns altere. Ha $\boldsymbol{A}$ nem szürjektív (és egyben nem injektív), akkor $\mathrm{Ran}\boldsymbol{A}$ olyan invariáns altere $\boldsymbol{A}$-nak, hogy $\boldsymbol{A}$ az ezen kívüli elemeket is ide képezi.

A triviális alterek – $\{\mathbf{0}\}$ és $\mathbf{V}$ – minden operátorra invariánsak. Van olyan operátor, amelynek nincs is más invariáns altere; ilyen például az aritmetikai síkon a $\phi \neq k\pi$ szögű forgatás.

Ha $\mathbf{M}$ invariáns $\boldsymbol{A}$-ra, akkor $\boldsymbol{A}$ leszűkítése $\mathbf{M}$-re $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris leképezés.

36.2. Különösen fontos az az eset, amikor két kiegészítő altér invariáns az operátorra.

Definíció *Azt mondjuk, hogy* $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ ***redukálja*** $\boldsymbol{A}$*-t, ha* $\mathbf{M}$ *és* $\mathbf{N}$ *kiegészítő alterek, és mind* $\mathbf{M}$*, mind* $\mathbf{N}$ *invariáns* $\boldsymbol{A}$*-ra.*

Érdemes megjegyezni, hogy előfordulhat, az $\mathbf{M}$ altér invariáns $\boldsymbol{A}$-ra, de $\mathbf{M}$ egyetlen kiegészítője sem az (lásd a 36.7.1. feladatot).

Nyilvánvaló, hogy $(\{\mathbf{0}\}, \mathbf{V})$ bármely operátort redukálja.

Ha $(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$ redukálja $\boldsymbol{A}$-t, és

$$\boldsymbol{A}_1 := \boldsymbol{A}|_{\mathbf{M}_1}, \qquad \boldsymbol{A}_2 := \boldsymbol{A}|_{\mathbf{M}_2},$$

valamint

$$\boldsymbol{L} : \mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2 \to \mathbf{V}, \quad (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mapsto \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,$$

akkor $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$. Emlékezzünk, hogy blokk-mátrixos írásmódban (lásd 11.5.),

$$\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}.$$

36.3. Emlékeztetünk a vetítés (projektor) fogalmára (lásd 9.5.). Egy $\boldsymbol{P}$ operátor projektor, ha $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$; ekkor $\mathbf{V} = \mathrm{Ran}\boldsymbol{P} \oplus \mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$, és $\boldsymbol{P}$ a $\mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$ mentén a $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P}$-re való vetítés.

Állítás *(i) Az* $\mathbf{M}$ *altér akkor és csak akkor invariáns az* $\boldsymbol{A}$ *operátorra, ha bármely* $\boldsymbol{P}$ *projektorra, amelyre* $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P} = \mathbf{M}$,

$$\boldsymbol{PAP} = \boldsymbol{AP}$$

teljesül.

(ii) Az $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *altérpár akkor és csak akkor redukálja* $\boldsymbol{A}$*-t, ha*

$$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{AP},$$

ahol $\boldsymbol{P}$ *az a projektor, amelyre* $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P} = \mathbf{M}$, $\mathrm{Ker}\boldsymbol{P} = \mathbf{N}$*, azaz* $\boldsymbol{P}$ *az* $\mathbf{N}$ *mentén az* $\mathbf{M}$*-re való vetítés.*

Bizonyítás (i) Legyen $\boldsymbol{P}$ projektor, $\mathbf{M} = \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}$. Ha $\mathbf{M}$ invariáns $\boldsymbol{A}$-ra, akkor minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén $\boldsymbol{Px} \in \mathbf{M}$, tehát $\boldsymbol{APx} \in \mathbf{M}$, azaz $\boldsymbol{PAPx} = \boldsymbol{APx}$.

Ha viszont $\boldsymbol{PAP} = \boldsymbol{AP}$, akkor minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$ esetén $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Px}$, így $\boldsymbol{PAx} = \boldsymbol{PAPx} = \boldsymbol{APx} = \boldsymbol{Ax}$, ami azt jelenti, hogy $\boldsymbol{Ax} \in \mathbf{M}$.

(ii) Tegyük fel, hogy $\mathbf{N}$, az $\mathbf{M}$ egy kiegészítő altere is invariáns $\boldsymbol{A}$-ra, és legyen $\boldsymbol{P}$ az a projektor, amelyre $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P} = \mathbf{M}$ és $\mathrm{Ker}\boldsymbol{P} = \mathbf{N}$. Ekkor $\mathbf{I} - \boldsymbol{P}$ olyan projektor, hogy $\mathrm{Ran}(\mathbf{I} - \boldsymbol{P}) = \mathbf{N}$, tehát az előző szerint az $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ pár akkor és csak akkor redukálja $\boldsymbol{A}$-t, ha $\boldsymbol{PAP} = \boldsymbol{AP}$ és $(\mathbf{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{A}(\mathbf{I} - \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{A}(\mathbf{I} - \boldsymbol{P})$; ez utóbbi viszont egyenértékű azzal, hogy $\boldsymbol{PAP} = \boldsymbol{PA}$. Összevetve a két egyenlőséget megkapjuk a kívánt összefügggést.

36.4. Emlékeztetünk arra, hogy a $\mathbf{V}$-nek bármely $\mathbf{M}$ alterével bevezettük a $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ faktorteret, amely szintén vektortér, és a $\Pi_{\mathbf{M}} :\to \mathbf{V}/\mathbf{M}$ természetes ráképezés lineáris (lásd 6.1.).

Állítás *Ha az* $\mathbf{M}$ *altér invariáns az* $\boldsymbol{A}$ *operátorra, akkor létezik egyértelműen egy* $\boldsymbol{A}/\mathbf{M} : \mathbf{V}/\mathbf{M} \to \mathbf{V}/\mathbf{M}$ *lineáris leképezes úgy, hogy*

$$\boldsymbol{A}/\mathbf{M} \circ \Pi_{\mathbf{M}} = \Pi_{\mathbf{M}} \circ \boldsymbol{A}.$$

Bizonyítás Az $\boldsymbol{A}/\mathbf{M}$ egyértelműsége nyilvánvaló abból, hogy $\Pi_{\mathbf{M}}$ ráképezés; azt kell csak megmutatnunk, hogy $\boldsymbol{A}/\mathbf{M}$ jól értelmezett. Ehhez a fenti összefüggést átírjuk más formába: $(\boldsymbol{A}/\mathbf{M})(\boldsymbol{x} + \mathbf{M}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{M}$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén. Azt kell tehát belátnunk, hogy ha $\boldsymbol{x} + \mathbf{M} = \boldsymbol{y} + \mathbf{M}$, akkor $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{M} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \mathbf{M}$. Ez viszont $\mathbf{M}$ invarianciájából következik: $\boldsymbol{x} + \mathbf{M} = \boldsymbol{y} + \mathbf{M}$ pontosan akkor teljesül, ha $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$, de ekkor $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \in \mathbf{M}$, azaz $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{M} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \mathbf{M}$.

36.5. Állítás *Ha* $\mathbf{M}$ *az* $\boldsymbol{A}$ *operátor invariánsa altere, akkor*

$$\det \boldsymbol{A} = \big(\det(\boldsymbol{A}|_{\mathbf{M}})\big)\big(\det(\boldsymbol{A}/\mathbf{M})\big).$$

Bizonyítás Legyen $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ a $\mathbf{V}$ olyan indexezett bázisa, hogy az első $N_1 := \dim\mathbf{M}$ elem az $\mathbf{M}$ bázisa, és legyen $\boldsymbol{R}$ nem nulla N-forma $\mathbf{V}$-n. Ekkor

$$\begin{aligned}(\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N) &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_N) = \\ &= (\det(\boldsymbol{A}|_{\mathbf{M}}))\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{N_1}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_{N_1+1}, \dots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_n),\end{aligned}$$

hiszen rögzített $N_2 := N - N_1$ utolsó változó esetén az első N_1 változóban $\boldsymbol{R}$ az $\mathbf{M}$-en N_1-forma.

Definiáljuk most a következő N_2-formát $\mathbf{V}/\mathbf{M}$-en:

$$\hat{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x}_1 + \mathbf{M}, \dots, \boldsymbol{x}_{N_2} + \mathbf{M}) := \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{N_1}, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{N_2}).$$

A definíció jó, hiszen ha például $\boldsymbol{x}_1 + \mathbf{M} = \boldsymbol{x}'_1 + \mathbf{M}$, akkor $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}'_1$ az $\mathbf{M}$ eleme, és így a $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{N_1}$ lineáris kombinációja, ezért $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{N_1}, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{N_2}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{N_1}, \boldsymbol{x}'_1, \dots, \boldsymbol{x}'_{N_2})$. Tehát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{N_1}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_{N_1+1}, \dots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_N) &= \hat{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_{N_1+1} + \mathbf{M}, \dots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_N + \mathbf{M}) = \\ &= \hat{\boldsymbol{R}}\big((\boldsymbol{A}/\mathbf{M})(\boldsymbol{v}_{N_1+1} + \mathbf{M}), \dots, (\boldsymbol{A}/\mathbf{M})(\boldsymbol{v}_N + \mathbf{M})\big) = \\ &= (\det(\boldsymbol{A}/\mathbf{M}))\hat{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{v}_{N_1+1} + \mathbf{M}, \dots, \boldsymbol{v}_N + \mathbf{M}) = \\ &= (\det(\boldsymbol{A}/\mathbf{M}))\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N),\end{aligned}$$

amivel a bizonyítást befejeztük.

36.6. Az előző bizonyítás első lépését kétszer alkalmazva kapjuk a következő eredményt.

Állítás *Redukálja az* $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *altérpár az* $\boldsymbol{A}$ *operátort. Ekkor*

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A}|_{\mathbf{M}})(\det \boldsymbol{A}|_{\mathbf{N}}).$$

36.7. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ operátornak van nem triviális invariáns altere, de nincs nem triviális altérpár, amely redukálja.

2. Legyen $\boldsymbol{D}$ a differenciálás operátora $\mathbf{P}_N$-en (a legfeljebb $(N-1)$-fokú polinomok vektorterén). Ha $M \leq N$, akkor $\mathbf{P}_M$ invariáns $\boldsymbol{D}$-re. Van-e $\mathbf{P}_M$-nek olyan kiegészítő altere, amely szintén invariáns $\boldsymbol{D}$-re?

3. Legyen $\boldsymbol{A}_1 \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}_1)$, $\boldsymbol{A}_2 \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}_2)$. Igazoljuk, hogy $\big(\mathbf{V}_1 \times \{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}\} \times \mathbf{V}_2\big)$ redukálja $\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$-t.

4. Ha az $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ altér invariáns $\boldsymbol{A}$-ra, akkor $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ is invariáns.

5. Legyen $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^\star$. Van-e invariáns altere $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p}$-nek? Redukálja-e ezt az operátort valamilyen altérpár? (Útmutatás: válaszzuk külön a $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v}) = 0$ és a $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{v}) \neq 0$ esetet.)

6. Redukálja az $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ altérpár az $\boldsymbol{A}$ operátort. A 10.4.(ii) állítás szerint $\boldsymbol{T} := \Pi_{\mathbf{M}}|_{\mathbf{N}} : \mathbf{N} \to \mathbf{V}/\mathbf{M}$ izomorfizmus. Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}|_{\mathbf{N}})\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{A}/\mathbf{M}$.

7. Legyen $\boldsymbol{A}$ a valós $\mathbf{V}$ vektortér operátora. Ha $\mathbf{M}$ invariáns $\boldsymbol{A}$-ra, akkor $\mathbf{M}_{\mathbb{C}} := \mathbf{M} + i\mathbf{M}$ invariáns $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$-re.

37. Sajátalterek

37.1. Definíció *A λ szám (a $\mathbb{K}$ eleme) az $\boldsymbol{A}$ operátor* ***sajátértéke****, ha van olyan $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, hogy $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$.*

Ha λ az $\boldsymbol{A}$ sajátértéke, akkor az

$$\mathbf{E}_\lambda := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{V} \mid \boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

lineáris altér az $\boldsymbol{A}$-nak a λ-hoz tartozó ***sajátaltere****; nemnulla elemei az $\boldsymbol{A}$* ***sajátvektorai****.*

$\mathbf{E}_\lambda$ dimenzióját a λ sajátérték ***geometriai multiplicitásának*** *nevezzük.*

Az $\boldsymbol{A}$ operátor sajátértékeinek az összességét az $\boldsymbol{A}$ **spektrumának** *hívjuk és* $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A})$*-val jelöljük.*

Az identitásnak egyetlen sajátértéke van, az 1.

Létezik olyan operátor, amelynek nincs sajátértéke: például $\mathbb{R}^2$-ben a $\phi \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) szögű forgatásnak.

Nyilvánvalóak a következő tények:

(i) Az $\boldsymbol{A}$ operátor bármely sajátaltere invariáns $\boldsymbol{A}$-ra.

(ii) Ha λ és μ az $\boldsymbol{A}$ operátor különböző sajátértékei, akkor $\mathbf{E}_\lambda \cap \mathbf{E}_\mu = \{\mathbf{0}\}$. Következésképpen

$$\mathbf{E}_\lambda \cap \sum_{\lambda \neq \mu \in \mathrm{Sp}\boldsymbol{A}} \mathbf{E}_\mu = \{\mathbf{0}\},$$

vagyis az operátor sajátaltereinek rendszere független; ez azt is maga után vonja, hogy egy olyan halmaz, amely az $\boldsymbol{A}$ különböző sajátértékű sajátvektoraiból áll, lineárisan független.

(iii) Ha $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$, akkor $\boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{x} = \lambda^2 \boldsymbol{x}$, aminek általánosításaként megállapíthatjuk, hogy ha p polinom, akkor $p(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = p(\lambda)\boldsymbol{x}$ (lásd 8.3.).

(iv) λ pontosan akkor sajátértéke $\boldsymbol{A}$-nak, ha $\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}$ nem injektív, azaz $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

(v) Ha $\boldsymbol{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ izomorfizmus, akkor $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{TAT}^{-1}$ sajátértékei azonosak, ugyanis $\boldsymbol{TAT}^{-1} - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{U}} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A} - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{V}})\boldsymbol{T}^{-1}$, és $\det(\boldsymbol{TAT}^{-1} - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{U}}) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{V}})$.

37.2. Állítás *Legyen $\boldsymbol{A}$ operátor. Ekkor a*

$$p_{\boldsymbol{A}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad \xi \mapsto \det(\boldsymbol{A} - \xi \mathbf{I})$$

függvény N-ed fokú polinom, amelyben a legmagasabb hatvány együtthatója $(-1)^N$.

Bizonyítás A determináns tulajdonsága szerint (lásd a 21.3. állítást)

$$(\det(\boldsymbol{A} - \xi\mathbf{I})) \bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}_k = \bigwedge_{k=1}^{N} (\boldsymbol{A} - \xi\mathbf{I})\boldsymbol{v}_k,$$

ahol $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N$ a $\mathbf{V}$ tetszőleges bázisa. A tenzorszorzás multilinearitása miatt a jobb oldal $N+1$ tag összegeként írható fel. Az első tag

$$\bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k = (\det \boldsymbol{A}) \bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}_k,$$

a második

$$-\xi\big[\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_N + \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_3 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_N + \\ \dots + \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_{N-1} \wedge \boldsymbol{v}_N\big] = \xi c_1 \bigwedge_{k=1} \boldsymbol{v}_k,$$

ahol c_1 valamely szám, ugyanis tudjuk, hogy az N-formák tere egy dimenziós, tehát a szögletes zárójelen belüli mennyiség a $\bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}_k$ számszorosa. A harmadik tag

$$\xi^2\big[\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_3 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_N + (\dots)\big] = \xi^2 c_2 \bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}_k,$$

ahol a szögletes zárójelen belül $(\dots)$ helyén az összes olyan $\bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{x}_k$ lehetőség szerepel, hogy valamely i és j $(i \neq j)$ esetén $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{v}_j$ és $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k$, ha $k \neq i$, $k \neq j$. A negyedik tag $\xi^3 c_3 \bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}_k$ alakú, és így tovább, az $N+1$-edik, az utolsó tag pedig $(-\xi)^N \bigwedge_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}_k$, amivel be is bizonyítottuk, amit akartunk. ■

Az imént bevezetett $p_{\boldsymbol{A}}$-t az $\boldsymbol{A}$ **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

37.3. Nyilvánvaló, hogy λ akkor és csak akkor sajátértéke $\boldsymbol{A}$-nak, ha $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = 0$, azaz λ gyöke az $\boldsymbol{A}$ karakterisztikus polinomjának.

Ebből rögtön megállapíthatjuk, hogy nem nulla dimenziós komplex vektortéren minden operátornak van sajátértéke.

Definíció *Ha λ sajátértéke $\boldsymbol{A}$-nak, akkor λ-nak mint a $p_{\boldsymbol{A}}$ gyökének a multiplicitását λ* ***algebrai multiplicitásának*** *nevezzük.*

A sajátértékek geometriai és algebrai multiplicitása nem szükségképpen egyenlő. Például $\mathbb{C}^2$-n a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ karakterisztikus polinomja $\xi \mapsto \det \begin{pmatrix} 1-\xi & 1 \\ 0 & 1-\xi \end{pmatrix} = (1-\xi)^2$, amelynek az 1 kétszeres gyöke, azaz a $\lambda := 1$ sajátérték algebrai multiplicitása 2, geometriai multiplicitása azonban csak 1, mert sajátaltere a $\mathbb{C} \times \{0\}$ egy dimenziós altér.

1. Állítás *Egy $\boldsymbol{A}$ operátor λ sajátértékének algebrai multiplicitása nagyobb vagy egyenlő, mint a geometriai multiplicitása.*

Bizonyítás Az $\mathbf{E}_\lambda$ sajátaltér invariáns altere $\boldsymbol{A}$-nak, és persze $\boldsymbol{A}-\xi\mathbf{I}$-nek is, így a 36.5. állítás szerint

$$\det(\boldsymbol{A}-\xi\mathbf{I}) = \big(\det((\boldsymbol{A}-\xi\mathbf{I})|_{\mathbf{E}_\lambda})\big)\big(\det((\boldsymbol{A}-\xi\mathbf{I})/\mathbf{E}_\lambda)\big) = \\ = (\lambda-\xi)^{\dim\mathbf{E}_\lambda}\big(\det((\boldsymbol{A}-\xi\mathbf{I})/\mathbf{E}_\lambda)\big),$$

hiszen $(\boldsymbol{A}-\xi\mathbf{I})|_{\mathbf{E}_\lambda} = (\lambda-\xi)\mathrm{id}_{\mathbf{E}_\lambda}$.

Ez azt jelenti, hogy λ az $\boldsymbol{A}$ karakterisztikus polinomjának legalább $\dim\mathbf{E}_\lambda$-szoros gyöke.

2. Állítás *Ha létezik $\mathbf{N}$ altér úgy, hogy $(\mathbf{E}_\lambda, \mathbf{N})$ redukálja $\boldsymbol{A}$-t, akkor a λ sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő.*

Bizonyítás Ekkor $\det(\boldsymbol{A}-\xi\mathbf{I}) = (\lambda-\xi)^{\dim\mathbf{E}_\lambda}\big(\det((\boldsymbol{A}-\xi\mathbf{I})|_{\mathbf{N}})\big)$, és a második tényezőnek λ nem gyöke, hiszen $(\boldsymbol{A}-\lambda\mathbf{I})|_{\mathbf{N}}$ injektív, tehát a determinánsa nem nulla.

37.4. Állítás *Legyen $\boldsymbol{A}$ a valós $\mathbf{V}$ vektortér operátora. Ekkor*

(i) $\mathrm{Sp}\boldsymbol{A} = \mathbb{R}\cap\mathrm{Sp}\boldsymbol{A}_\mathbb{C}$, és $\boldsymbol{A}_\mathbb{C}$-nek $\lambda\in\mathbb{R}$ sajátértékű sajátaltere megegyezik az $\boldsymbol{A}$-nak a λ sajátértékű sajátalterének komplexifikáltjával,

(ii) ha $\lambda\in\mathrm{Sp}\boldsymbol{A}_\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, akkor $\lambda^*\in\mathrm{Sp}\boldsymbol{A}_\mathbb{C}$, és $\boldsymbol{A}_\mathbb{C}$-nek a λ^*-hoz tartozó sajátaltere a λ-hoz tartozó sajátaltér komplex konjugáltja.

Bizonyítás Ha ξ valós szám, akkor $(\boldsymbol{A}-\xi\mathbf{I})_\mathbb{C} = \boldsymbol{A}_\mathbb{C}-\xi\mathrm{id}_{\mathbf{V}_\mathbb{C}}$, és így 28.5. alapján $\det(\boldsymbol{A}_\mathbb{C}-\xi\mathrm{id}_{\mathbf{V}_\mathbb{C}}) = \det(\boldsymbol{A}-\xi\mathbf{I})$, ezért $\boldsymbol{A}_\mathbb{C}$ karakterisztikus polinomja valós, azaz valós számon az értéke valós (vagy másképp: az együtthatói valósak). Ebből egyrészt az következik, hogy $\boldsymbol{A}_\mathbb{C}$-nek a valós λ akkor és csak akkor sajátértéke, ha sajátértéke $\boldsymbol{A}$-nak, másrészt az, hogy ha a nem valós λ a sajátértéke, akkor λ^* is.

Ha $\lambda\in\mathbb{R}$ az $\boldsymbol{A}$ sajátértéke, és $\mathbf{E}_\lambda$ jelöli az $\boldsymbol{A}$ sajátalterét, akkor $\mathbf{E}_\lambda + i\mathbf{E}_\lambda$ nyilván része az $\boldsymbol{A}_\mathbb{C}$ λ-sajátalterének; viszont, ha $\lambda(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}_\mathbb{C}(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, akkor $\lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ és $\lambda\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, tehát $\boldsymbol{A}_\mathbb{C}$-nek a λ-sajátaltere része az $\mathbf{E}_\lambda + i\mathbf{E}_\lambda$ altérnek.

Ha $\lambda\notin\mathbb{R}$ az $\boldsymbol{A}_\mathbb{C}$ sajátértéke és $\boldsymbol{A}_\mathbb{C}\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}$, akkor a 28.7.1. feladat értelmében $\boldsymbol{A}_\mathbb{C}\boldsymbol{z}^* = (\boldsymbol{A}_\mathbb{C}\boldsymbol{z})^* = \lambda^*\boldsymbol{z}^*$; a λ és a λ^* szerepét felcserélve megkapjuk a sajátalterekre bizonyítandó összefüggést. ■

Legyen $\lambda = \alpha + i\beta$ az $\boldsymbol{A}_\mathbb{C}$ sajátértéke az $\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}$ sajátvektorral. Ekkor könnyen kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{y}, \qquad A\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y},$$

amiből az következik, hogy az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ generálta altér $\mathbf{V}$-ben invariáns $\boldsymbol{A}$-ra.

Mivel komplex vektortéren értelmezett operátornak van sajátértéke, láthatjuk, hogy valós vektortéren értelmezett operátornak ha nincs is sajátértéke, van két dimenziós invariáns altere.

37.5. Feladatok

1. Határozzuk meg a következő komplex mátrixok sajátértékeit és sajátaltereit:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Legyen $\pi \in \mathrm{Perm}_N$ és $\boldsymbol{A} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto (\xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(N)})$. Mik az $\boldsymbol{A}$ sajátértékei és sajátalterei?

3. Mik a legeljebb $(N-1)$-ed fokú polinomokon értelmezett
(i) $\boldsymbol{D}$, (i) $\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}_{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}}$, $\boldsymbol{M}^2_{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{D}^2$
operátorok sajátértékei, sajátalterei?

4. Mutassuk meg, hogy minden vetítés (projektor) sajátértéke csak a nulla vagy az egy lehet.

5. Vizsgáljuk meg az előző feladatokban a sajátértékek geometriai és algebrai multiplicitását.

6. Egy operátor pontosan akkor injektív, ha a nulla nem sajátértéke.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $\boldsymbol{A}_1 \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}_1)$ és $\boldsymbol{A}_2 \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}_2)$, akkor
(i) $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2) = (\mathrm{Sp}\boldsymbol{A}_1) \cup (\mathrm{Sp}\boldsymbol{A}_2)$,
(ii) $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A}_1 \otimes \boldsymbol{A}_2) = (\mathrm{Sp}\boldsymbol{A}_1)(\mathrm{Sp}\boldsymbol{A}_2)$
(a legutolsó szimbólum komplexus-szorzást jelent).

8. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Sp}\boldsymbol{A}^\star = \mathrm{Sp}\boldsymbol{A}$.

9. Igazoljuk, hogy bármely N-ed fokú polinom ($N \in \mathbb{N}$) valamely operátornak a karakterisztikus polinomja. (Útmutatás: tekintsük azt az $N \times N$-es mátrixot, amelynek az utolsó sorában tetszőleges számok állnak, és a főátló fölött 1-esek, mindenhol máshol nullák.)

10. Legyen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Adjuk meg

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

sajátértékeit és sajátaltereit mint valós mátrixnak is és mint komplex mátrixnak is.

38. Nilpotens operátorok

38.1. Definíció *Egy operátort* ***nilpotensnek*** *nevezünk, ha valamely pozitív hatványa nulla. Az* $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ *nilpotens operátor* ***nilpotencia-indexe*** *az az* n *pozitív egész szám, amelyre* $\boldsymbol{A}^n = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{A}^{n-1} \neq \mathbf{0}$*; a nulla-operátor nilpotencia-indexe nulla.*

Például a legfeljebb $(N-1)$-ed fokú polinomok vektorterén a differenciálás N indexű nilpotens operátor.

A nilpotens operátorok nyilván nem lehetnek injektívek (tehát szürjektivek sem). Szemléletesen úgy fogalmazhatunk, hogy a nem injektív operátorok között a nilpotensek hasonlítanak a legjobban a nullára.

38.2. Állítás *Tetszőleges* $\boldsymbol{A}$ *operátorhoz van olyan egyértelműen meghatározott* $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *altér-pár, amely redukálja* $\boldsymbol{A}$*-t úgy, hogy* $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{M}}$ *injektív és* $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{N}}$ *nilpotens.*

Bizonyítás Világos, hogy $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^k) \subset \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^{k+1})$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén; $\mathbf{V}$ dimenziójának a végessége miatt van egy olyan legkisebb n, hogy

$$\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^n) = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^{n+1}),$$

továbbá

$$\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^n) = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^{n+i}) \qquad (i = 1, 2, \dots). \tag{$*$}$$

Ez utóbbit úgy láthatjuk be, hogy ha $\mathbf{0} = \boldsymbol{A}^{n+2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, akkor az előző egyenlőség miatt $\mathbf{0} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}$, azaz $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^{n+2}) = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^{n+1}) = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^n)$, és így tovább minden $n+i$ $(i \in \mathbb{N})$ esetén.

Megmutatjuk, hogy $\mathbf{N} := \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^n)$ és $\mathbf{M} := \mathrm{Ran}(\boldsymbol{A}^n)$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

Nyilvánvaló, hogy mind $\mathbf{N}$, mind $\mathbf{M}$ invariáns $\boldsymbol{A}$-ra.

Az is nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{N}}$ nilpotens és az indexe n.

Ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$, azaz valamely $\boldsymbol{y}$ vektorral $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{y}$, és $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, tehát $(*)$ miatt $\mathbf{0} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, vagyis $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{M}}$ injektív.

Legyen $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$. Ekkor egyrészt van olyan $\boldsymbol{y}$ vektor, hogy $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{y}$, másrészt $\mathbf{0} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{2n}\boldsymbol{y}$, azaz ismét a $(*)$ miatt $\mathbf{0} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$; tehát $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \{\mathbf{0}\}$. Mivel 9.4. szerint $\dim\mathbf{M} + \dim\mathbf{N} = \dim\mathbf{V}$, megállapíthatjuk, hogy $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ kiegészítő alterek.

Tegyük most föl, hogy a $(\mathbf{H}, \mathbf{K})$ altér-pár redukálja $\boldsymbol{A}$-t, $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{H}}$ injektív és $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{K}}$ nilpotens. Legyen $n_{\mathbf{K}}$ ez utóbbi operátor nilpotencia-indexe. Ekkor $\mathbf{K} \subset \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^{n_{\mathbf{K}}}) \subset \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^n) = \mathbf{N}$. Minthogy $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{H}} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ injektív és ezért szürjektív is, minden k-ra $\mathbf{H} \subset \mathrm{Ran}(\boldsymbol{A}^k)$, speciálisan igaz ez $k = n$ esetén is, tehát $\mathbf{H} \subset \mathrm{Ran}(\boldsymbol{A}^n) = \mathbf{M}$.

Dimenziós okok miatt a $\mathbf{H} \subset \mathbf{M}$ és $\mathbf{K} \subset \mathbf{N}$ tartalmazás csak úgy lehet, hogy $\mathbf{K} = \mathbf{N}$ és $\mathbf{H} = \mathbf{M}$. ■

Természetesen, ha $\boldsymbol{A}$ injektív, akkor $\mathbf{N} = \{\mathbf{0}\}$, és ha $\boldsymbol{A}$ nilpotens, akkor $\mathbf{M} = \{\mathbf{0}\}$.

> **38.3.** Állítás *Ha $\boldsymbol{A}$ n indexű nilpotens operátor és $\boldsymbol{x}$ olyan vektor, hogy $\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, akkor az $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}$ vektorok lineárisan függetlenek, és az általuk generált $\mathbf{M}$ lineáris altér invariáns $\boldsymbol{A}$-ra. Továbbá létezik olyan $\mathbf{N}$ lineáris altér, hogy az $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ pár redukálja $\boldsymbol{A}$-t.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Alkalmazzuk az egyenlőségre az $\boldsymbol{A}^{n-1}$ operátort. A jobb oldal nulla, a bal oldalon az összegből a nulla indexű tagot kivéve mind nulla lesz, hiszen $\boldsymbol{A}$-nak n-edik és annál nagyobb hatványai szerepelnek; tehát $\alpha_0 \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, amiből $\alpha_0 = 0$. Ezután a $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ egyenlőségre az $\boldsymbol{A}^{n-2}$ operátort alkalmazva az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy $\alpha_1 = 0$. Folytatva ezt az eljárást látjuk, hogy szükségképpen $\alpha_0 = \alpha_i = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$, tehát a szóban forgó vektorok lineárisan függetlenek.

Nyilvánvaló, hogy az általuk generált $\mathbf{M}$ lineáris altér invariáns $\boldsymbol{A}$-ra.

Egészítsük ki az iménti lineárisan független halmazt bázissá $\mathbf{V}$-ben. Legyen $\boldsymbol{p}$ a $\mathbf{V}^\star$-nak az az eleme, amelyre $(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}) = 1$, és minden más báziselemhez a nullát rendeli; vezessük be ezzel a

$$\boldsymbol{P} := \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^k (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}) \boldsymbol{A}^{n-1-k}$$

operátort. Mivel minden $\boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén $\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x} (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{A}^{n-1-k}\boldsymbol{y})$, egyszerű tény, hogy $\mathrm{Ran}\boldsymbol{P} = \mathbf{M}$ és $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^i\boldsymbol{x}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, tehát $\boldsymbol{P}|_{\mathbf{M}} = \mathrm{id}_{\mathbf{M}}$; következésképpen $\boldsymbol{P}$ az $\mathbf{N} := \mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$ mentén az $\mathbf{M}$-re való vetítés (lásd a 9.7.9. feladatot).

Megmutatjuk, hogy $\boldsymbol{A}$ felcserélhető $\boldsymbol{P}$-vel.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^{k+1} (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}) \boldsymbol{A}^{n-1-k} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}^i (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}) \boldsymbol{A}^{n-i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{A}^i (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p}) \boldsymbol{A}^{n-i};$$

az első egyenlőségnél az $i := k+1$ jelölésre tértünk át, a másodiknál azt használtuk ki, hogy $\boldsymbol{A}^n = \mathbf{0}$. Még egyszerűbben kapjuk azt, hogy

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p})\boldsymbol{A}^{n-i} = \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{A}^i(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{p})\boldsymbol{A}^{n-i},$$

tehát

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}.$$

A 36.3. állítás értelmében tehát az $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ altér-pár redukálja $\boldsymbol{A}$-t, és ezzel befejeztük a bizonyítást.

38.4. Állítás *Ha $\boldsymbol{A}$ n indexű nilpotens operátor egy nem nulla dimenziós vektortéren, akkor vannak olyan s és $n = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_s$ pozitív egész számok és $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s$ vektorok, hogy*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{A}^{n_1-1}\boldsymbol{x}_1, \\ &\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{A}^{n_2-1}\boldsymbol{x}_2, \\ &\vdots \\ &\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_s, \ldots, \boldsymbol{A}^{n_s-1}\boldsymbol{x}_s \end{aligned} \tag{$*$}$$

bázist alkotnak $\mathbf{V}$-ben, és

$$\boldsymbol{A}^{n_1}x_1 = \boldsymbol{A}^{n_2}\boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{A}^{n_s}\boldsymbol{x}_s = \mathbf{0}.$$

Bizonyítás Van olyan $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{V}$, hogy $\boldsymbol{A}^{n_1-1}\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$, és persze $\boldsymbol{A}^{n_1}\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$. Az előző pont szerint $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{A}^{n_1-1}\boldsymbol{x}_1$ lineárisan függetlenek, az általuk kifeszített altérnek van $\boldsymbol{A}$-ra invariáns $\mathbf{V}_2$ kiegészítője. Ha $\mathbf{V}_2 = \{\mathbf{0}\}$, akkor kész vagyunk. Ellenkező esetben a $\mathbf{V}_2$-re leszűkítve $\boldsymbol{A}$ szintén nilpotens, a nilpotencia-indexe $n_2 \leq n_1$. Van olyan $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbf{V}_2$, hogy $\boldsymbol{A}^{n_2-1}\boldsymbol{x}_2 \neq \mathbf{0}$, és persze $\boldsymbol{A}^{n_2}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$. Megismételve az előbbieket, a $\mathbf{V}_2$-beli $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{A}^{n_2-1}\boldsymbol{x}_2$ lineárisan független vektorok által kifeszített altérnek van a $\mathbf{V}_2$-ben olyan $\mathbf{V}_3$ kiegészítő altere, amely invaráns $\boldsymbol{A}$-ra. Ha $\mathbf{V}_3 = \{\mathbf{0}\}$, akkor kész vagyunk. Ha nem, így folytatva, véges lépésben kimerítjük a lehetőségeket. ■

Érdemes megjegyezni, hogy ha van olyan $1 \leq k_1 \leq s$, hogy $n_{k_1} = 1$, akkor $n_k = 1$ minden $k_1 \leq k \leq s$ esetén, és ekkor az $\boldsymbol{x}_k$ vektorhoz tartozó $(*)$ sorozat egy elemű.

$\boldsymbol{A}$ mátrixa az állításban leírt bázisban igen egyszerű: s blokkból álló blokk-diagonális mátrix, a k-adik blokk $n_k \times n_k$-s mátrix, amely az 1×1-es nulla mátrix, ha $n_k = 1$, és $n_k > 1$ esetén olyan mátrix, amelyben a főátló alatt 1-esek állnak, máshol nullák:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

38.5. Állítás *Ha $\boldsymbol{A}$ nilpotens operátor, akkor* $\mathrm{Sp}\boldsymbol{A} = \{0\}$. *A nulla sajátérték*

– *geometria multiplicitása* $\dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})) =: s$,
– *algebrai multiplicitása* $\dim\mathbf{V} = N$,
– *ha n az $\boldsymbol{A}$ nilpotencia-indexe, akkor* $n \leq N - s + 1$.

Bizonyítás Nilpotens operátor nem injektív, tehát a nulla sajátértéke. Ha λ az $\boldsymbol{A}$ sajétértéke, akkor λ^n az $\boldsymbol{A}^n = \mathbf{0}$ sajátértéke, azaz $\lambda^n = 0$, és így $\lambda = 0$. Tehát a nilpotens operátor spektruma a nulla.

Definíció szerint a nulla sajátérték geometriai multiplicitása az $\boldsymbol{A}$ magjának a dimenziója. Mivel csak egy sajátérték van, ez az $\boldsymbol{A}$ karakterisztikus polinomjának N-szeres gyöke, tehát az algebrai multiplicitás valóban a $\mathbf{V}$ dimenziója.

Az előző állításból – az ottani jelöléssel – nyilvánvaló: az $\boldsymbol{A}^{n_1-1}x_1, \boldsymbol{A}^{n_2-1}\boldsymbol{x}_2$, $\dots, \boldsymbol{A}^{n_s-1}\boldsymbol{x}_s$ lineárisan független vektorok feszítik ki az $\boldsymbol{A}$ magját (tehát s az előző állításban is épp a $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$ dimenziója). Mivel az $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 \dots, \boldsymbol{A}^{n_1-1}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_s$ vektorok lineárisan függetlenek, látjuk, hogy $n_1 - 1 + s \leq N$, amit bizonyítani akartunk, hiszen $n_1 = n$.

38.6. Feladatok

1. Igazoljuk a 38.4. állítás alapján, hogy nilpotens operátor nyoma nulla.
2. Bármely $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ operátor esetén $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} - \mathbf{I}$ nem nilpotens.
3. Adjuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixnak (mint $\mathbb{K}^3$ operátorának) a 38.2. szerinti redukálását.

4. Legyen az $\boldsymbol{A}$ operátor injektív egy $\mathbf{L}$ lineáris altéren. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbf{L} \subset \mathbf{M}$, ahol $\mathbf{M}$ a 38.2-ben szereplő altér.

39. A Jordan-féle alak

39.1. Eddigi eredményeink csúcsaként általános jellemzést adhatunk *komplex* vektortéren értelmezett operátorról. Valós vektortér operátoraira ezt a jellemzést a komplexifikálton keresztül hasznosíthatjuk.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{A}$ a komplex $\mathbf{V}$ vektortér operátora. Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az $\boldsymbol{A}$ (különböző) sajátértékei az $m_1, \ldots, m_n$ algebrai multiplicitással és $s_1, \ldots, s_n$ geometriai multiplicitással, és legyenek $\mathbf{E}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbf{E}_{\lambda_n}$ a megfelelő sajátalterek. Ekkor egyértelműen létezik egy $\mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{N}_n$ kiegészítő altér-rendszer, azaz*

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i,$$

úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, n$ esetén

(i) $\dim \mathbf{N}_i = m_i$,

(ii) $\mathbf{N}_i$ invariáns $\boldsymbol{A}$-ra,

(iii) $\mathbf{E}_{\lambda_i} \subset \mathbf{N}_i$,

(iv) $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})|_{\mathbf{N}_i}$ nilpontens az $(m_i - s_i + 1)$-nél nem nagyobb nilpotencia-indexszel.

Bizonyítás Rögzítsük tetszőlegesen az $i = 1, \ldots, n$ indexet. Alkalmazzuk a 38.2. állítást az $\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I}$ operátorra: így kapjuk az $\mathbf{N}_i$ és $\mathbf{M}_i$ egyértelműen meghatározott kiegészítő altereket, amelyen a szóban forgó operátor nilpotens, illetve injektív.

$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})|_{\mathbf{M}_i}$ injektív, tehát $\boldsymbol{A}$-nak $\mathbf{M}_i$-n a λ_i nem sajátértéke.

$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})|_{\mathbf{N}_i}$ nilpotens, ezért $\boldsymbol{A}$-nak $\mathbf{N}_i$-n csak λ_i a sajátértéke. Tegyük ugyanis föl, hogy valamely $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbf{M}_i$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$; ekkor $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})\boldsymbol{x} = (\lambda - \lambda_i)\boldsymbol{x}$, vagyis $\lambda - \lambda_i$ egy nilpontens operátor sajátértéke, ami csak úgy lehet, hogy $\lambda - \lambda_i = 0$.

Ha tehát $\mathbf{E}_{\lambda_i}$ jelöli a λ_i-hez tartozó sajátalteret, akkor $\mathbf{E}_{\lambda_i} \cap \mathbf{M}_i = \{\mathbf{0}\}$, ami az 5.5.5 feladat alapján azt jelenti, hogy $\mathbf{E}_{\lambda_i} \subset \mathbf{N}_i$, tehát a λ_i geometriai multiplicitása megegyezik az $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})|_{\mathbf{N}_i}$ nulla sajátértékének a geometriai multiplicitásával. Ezért $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})|_{\mathbf{N}_i}$ nilpotencia-indexe kisebb-egyenlő mint $\dim \mathbf{N}_i - s_i + 1$.

Az $(\mathbf{M}_i, \mathbf{N}_i)$ altér-pár redukálja $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})$-t, ezért redukálja $(\boldsymbol{A} - \xi \mathbf{I})$-t is minden $\xi \in \mathbb{C}$ esetén, tehát 36.6. alapján

$$p_{\boldsymbol{A}}(\xi) = \det(\boldsymbol{A} - \xi \mathbf{I}) = \big(\det(\boldsymbol{A} - \xi \mathbf{I})|_{\mathbf{N}_i}\big)\big(\det(\boldsymbol{A} - \xi \mathbf{I})|_{\mathbf{M}_i}\big).$$

Mivel $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})|_{\mathbf{M}_i}$ injektív, a determinánsa nem nulla. Viszont $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})|_{\mathbf{N}_i}$ nilpotens, tehát a determinánsa nulla, de a fentiek szerint $\det(\boldsymbol{A} - \xi \mathbf{I})|_{\mathbf{N}_i} \neq 0$ ha $\xi \neq \lambda_i$.

Mindezek együtt azt jelentik, hogy a $p_{\boldsymbol{A}}$ karakterisztikus polinomnak és a $\det(\boldsymbol{A} - \xi \mathbf{I})|_{\mathbf{N}_i}$ polinomnak λ_i ugyananannyi multiplicitású gyöke, és ez utóbbinak a multiplicitása az $(\boldsymbol{A} - \xi \mathbf{I})|_{\mathbf{N}_i}$ nilpotens operátor nulla sajátértékének az algebrai multiplicitása, ami éppen az $\mathbf{N}_i$ altér dimenziója; végülis tehát $m_i = \dim \mathbf{N}_i$.

Amit mondtunk, minden i-re igaz. Vegyünk egy j indexet; nyilvánvaló, hogy minden $i \neq j$ esetén $\mathbf{N}_j \subset \mathbf{M}_i$, ami maga után vonja, hogy

$$\mathbf{N}_j \cap \sum_{j \neq i=1}^{n} \mathbf{N}_i = \{\mathbf{0}\},$$

és ez a $\dim\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \dim\mathbf{N}_1$ miatt azt jelenti, hogy $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n$ kiegészítő altérrendszer. ■

39.2. A fenti eredményünket más, szemléletesebb formába is írhatjuk. Legyen $\boldsymbol{P}_i$ az $\mathbf{N}_i$-re való vetítés az $\mathbf{M}_i = \sum_{i \neq k=1}^{n} \mathbf{N}_k$ mentén, és legyen $\boldsymbol{J}_i := (\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})|_{\mathbf{N}_i}$. Ekkor 9.6. szerint $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i = \mathbf{I}$, és így

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i = \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i \mathbf{I} + (\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})]\boldsymbol{P}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \mathbf{I} + \boldsymbol{J}_i)\boldsymbol{P}_i. \qquad (*)$$

Vagyis átfogalmazva az előbbi állítást: ha $\boldsymbol{A}$ a komplex $\mathbf{V}$ vektortér operátora, amelynek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a (különböző) sajátértékei rendre az $m_1, \dots, m_n$ algebrai multiplicitással és az $s_1, \dots, s_n$ geometriai multiplicitással, és $\mathbf{E}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{E}_{\lambda_n}$ a megfelelő sajátalterek, akkor egyértelműen léteznek

– $\boldsymbol{P}_1, \dots, \boldsymbol{P}_n$ projektorok (vetítések) úgy, hogy $\boldsymbol{P}_i \boldsymbol{P}_j = \mathbf{0}$, ha $i \neq j$ és $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i = \mathbf{I}$,

– $\boldsymbol{J}_i : \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_i \to \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_i$ nilpotens operátorok az $(m_i - s_i + 1)$-nél nem nagyobb nilpotencia-indexszel $(i = 1, \dots, n)$,

úgy, hogy a $(*)$ egyenlőség igaz, továbbá minden $i = 1, \dots, n$ esetén

(i) $\dim(\mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_i) = m_i$,

(ii) $\mathbf{E}_{\lambda_i} \subset \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_i$,

(iii) $\boldsymbol{P}_i \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i$.

39.3. Használjuk az előző jelöléseket. Az $\mathbf{N}_i$ altér tartalmazza az $\mathbf{E}_{\lambda_i}$ sajátalteret. Ha egyenlők, akkor van $\mathbf{N}_i$-ben sajátvektorokból álló bázis. Ha nem egyenlők, akkor a 38.4. szerint választható $\mathbf{N}_i$-ben olyan bázis, amelynek s_i tagja sajátvektor, a többiek pedig a λ_i-hez tartozó "háttérvektorok", amelyeket az jellemez, hogy $\boldsymbol{v}, (\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})\boldsymbol{v}, \dots, (\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{k-1}\boldsymbol{v}$ alakúak valamilyen k-ra úgy, hogy egyik sem sajátvektor, de $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})^k \boldsymbol{v}$ már igen.

Ha minden $\mathbf{N}_i$-ben ilyen bázist választunk, akkor ezek a bázisok együttesen a $\mathbf{V}$ bázisát alkotják, amelyben $\boldsymbol{A}$ mátrixa igen egyszerű. Minden olyan tag a mátrixban, amely nem a főátlóban van és nem is alatta, nulla. A főátlóban $\boldsymbol{A}$ sajátértékei állnak, mindegyik annyiszor, amennyi az algebrai multiplicitása. A főátló alatt pedig 1 vagy 0 áll. Ezt hívjuk **Jordan-féle** alaknak. A Jordan-féle alak tehát blokk-diagonális mátrix:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}(\lambda_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{B}(\lambda_n) \end{pmatrix}, \tag{$*$}$$

ahol $\mathbf{0}$ megfelelő méretű nulla-blokkokat jelöl, $\boldsymbol{B}(\lambda_i)$ pedig az i-edik sajátértéknek megfelelő blokk, és például egy 5 algebrai és 2 geometriai multiplicitású λ sajátértéknek megfelelő blokk

$$\boldsymbol{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{$**$}$$

39.4. Hangsúlyozzuk, a Jordan-féle alak illetve a 39.2. $(*)$ alakú előállítás komplex vektortéren értelmezett operátorokra igaz. Természetesen nincs kizárva, hogy valós vektortér egyes speciális operátoraira is hasonló mondható.

Közelebbről, egy valós vektortéren értelmezett $\boldsymbol{A}$ operátor esetén lehetséges, hogy az operátor előáll 39.2. $(*)$ alakban, és lehetséges, hogy nem; ekkor a komplexifikáltja olyan alakú.

Definíció *Egy operátort **diagonalizálhatónak** nevezünk, ha van olyan mátrixa (valamely koordinátázásban), amely diagonális.*

Egy diagonális mátrix nemnulla tagjai a mátrix (mint lineáris leképezés) sajátértékei. A diagonális mátrix sajátvektorai a standard bázisvektorok. Ezek alapján nyilvánvaló a következő.

Állítás *Egy operátorra a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) van a sajátvektoraiból álló bázis,

(ii) a sajátalterei kifeszítik az egész teret.

(iii) diagonalizálható.

Ezekből következik, és komplex vektortér esetén egyenértékű is velük:

(iv) minden sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.

Legyen $\boldsymbol{A}$ egy valós vektortér olyan operátora, amely nem diagonalizálható, de $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$ diagonalizálható. Ilyen például $\mathbb{R}^2$-n a $\phi \in]-\pi, \pi[$ szögű forgatás.

Ha λ az $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$-nek nem valós sajátértéke és $\boldsymbol{z}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor λ^* is sajátérték $\boldsymbol{z}^*$ sajátvektorral.

A 37.4-ben mondottak szerint a $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ előállítással az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ generálta két dimenziós altér $\mathbf{V}$-ben invariáns $\boldsymbol{A}$-ra, és

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y},$$

ahol α és $\beta \neq 0$ a λ-nak a valós illetve a képzetes része.

Legyen λ az $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$-nek m multiplicitású sajátértéke (az algebrai és geometriai multiplicitás megegyezik, hiszen $\boldsymbol{A}_{\mathbb{C}}$ diagonalizálható), és $(\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{x}_k + i\boldsymbol{y}_k \mid k = 1, \ldots, m)$ a hozzá tartozó sajátalterének egy indexezett bázisa. Ekkor a lineárisan független $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_m)$ vektorok az eredeti valós $\mathbf{V}$ vektortérben egy $\mathbf{M}$ alteret feszítenek ki, amely invariáns $\boldsymbol{A}$-ra. $\boldsymbol{A}|_{\mathbf{M}}$ mátrixa ebben a bázisban blokk-diagonális, amelyben m darab azonos

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

diagonális blokk szerepel.

Ennek megfelelően $\mathbf{V}$ egy alkalmasan választott bázisában – amelyben az $\boldsymbol{A}$-nak a sajátvektorai és az imént megkonstruált típusú vektorok szerepelnek – az $\boldsymbol{A}$ mátrixa olyan blokk-diagonális, amelyben egy blokk az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában az $\boldsymbol{A}$ sajátértékei állnak (mindegyik annyiszor, amennyi a multiplicitása), majd $(*)$ típusú blokkok következnek.

39.5. Vegyünk egy diagonalizálható $\boldsymbol{A}$ operátort. Ekkor

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{P}_i, \tag{$*$}$$

ahol λ_i az operátor sajátértékei, $\boldsymbol{P}_i$ az $\mathbf{E}_{\lambda_i}$-re a $\sum\limits_{i \neq k=1}^{n} \mathbf{E}_{\lambda_k}$ mentén való vetítés, $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j = \delta_{ij}\boldsymbol{P}_i$ és $\sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i = \mathbf{I}$. Ebből azonnal adódik, hogy minden $r \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{A}^r = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^r \boldsymbol{P}_i$, sőt, ha p tetszőleges polinom (valós vagy komplex, aszerint, hogy a vektortér valós vagy komplex), akkor

$$p(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} p(\lambda_i)\boldsymbol{P}_i.$$

Ennek megfelelően, ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Sp}\boldsymbol{A} \subset \mathrm{Dom} f$, akkor értelmezzük az

$$f(\boldsymbol{A}) := \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\boldsymbol{P}_i$$

operátort.

Például, ha a valós vektortér $\boldsymbol{A}$ diagonalizálható operátorának minden sajátértéke nemnegatív, akkor értelmes a $\sqrt{\boldsymbol{A}}$ operátor. Komplex vektortér bármely diagonalizálható operátorának értelmes a négyzetgyöke.

Speciálisan egy diagonális mátrix függvényére az

$$f\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\alpha_N) \end{pmatrix}$$

formulát kapjuk.

39.6. Vegyünk egy 39.2. $(*)$ alakú operátort (komplex vektortéren minden operátor ilyen alakú). Mivel $\boldsymbol{J}_i$ értékkészlete benne van $\boldsymbol{P}_i$ értékkészletében és $\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{0}$, ha $i \neq j$, látható, hogy $\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{J}_i = \delta_{ij}\boldsymbol{J}_i$. Ebből könnyen kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{A}^2 = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^2 + 2\lambda\boldsymbol{J}_i + \boldsymbol{J}_i^2)\boldsymbol{P}_i,$$

és álltalában minden $r \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boldsymbol{A}^r = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\lambda_i^{r-k}\boldsymbol{J}_i^k\right)\boldsymbol{P}_i.$$

A második összegzés, noha formailag 0-tól r-ig fut, már r előtt is véget érhet, hiszen ha r nagyobb vagy egyenlő, mint az $\boldsymbol{J}_i$ nilpotencia-indexe, akkor az r-nél nagyobb indexű tagok mind nullák. Elfogadva azt a megállapodást, hogy

$$\binom{r}{k} := 0 \qquad \text{ha } k > r,$$

és r_i-vel jelölve az $\boldsymbol{J}_i$ nilpotencia-indexét azt írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{A}^r = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{r_i-1}\binom{r}{k}\lambda_i^{r-k}\boldsymbol{J}_i^k\right)\boldsymbol{P}_i.$$

A $p = \sum\limits_{r=0}^{M} c_r \mathrm{id}_{\mathbb{K}}^r$ polinom k-adik deriváltjára $(k = 0, 1, 2, \dots)$

$$p^{(k)} = k!\sum_{r=0}^{M} c_r\binom{r}{k}\mathrm{id}_{\mathbb{K}}^{r-k}$$

áll fenn, tehát a fentiek alapján

$$p(\boldsymbol{A}) = \sum_{r=0}^{M} c_r \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{r_i-1} \binom{r}{k} \lambda_i^{r-k} \boldsymbol{J}_i^k \right) \boldsymbol{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{M} c_r \binom{r}{k} \lambda_i^{r-k} \boldsymbol{J}_i^k =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{1}{k!} p^{(k)}(\lambda_i) \boldsymbol{J}_i^k \right) \boldsymbol{P}_i.$$

Ennek megfelelően, ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ olyan függvény, amely $\max\{r_1-1, \dots, r_n-1\}$-szer differenciálható és $\mathrm{Sp}\boldsymbol{A} \subset \mathrm{Dom} f$, akkor értelmezzük az

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda_i) \boldsymbol{J}_i^k \right) \boldsymbol{P}_i$$

operátort.

Speciálisan a 39.3. $(*)$ Jordan-alakú mátrixra

$$f \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}(\lambda_1) & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}(\lambda_2) & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{B}(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{B}(\lambda_1)) & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & f(\boldsymbol{B}(\lambda_2)) & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & f(\boldsymbol{B}(\lambda_n)) \end{pmatrix},$$

és például a 39.3. $(**)$ alakú blokkra

$$f(\boldsymbol{B}(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f'(\lambda) & f(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2!} f''(\lambda) & f'(\lambda) & f(\lambda) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3!} f'''(\lambda) & \frac{1}{2} f''(\lambda) & f'(\lambda) & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

39.7. Feladatok

1. Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixnak mint $\mathbb{C}^3$ operátorának a Jordan-féle alakját.

2. Melyek diagonalizálhatók az alábbi valós mátrixok közül:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Melyek diagonalizálhatók, mint komplex mátrixok?

3. Milyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ komplex számok esetén diagonalizálható az az $N \times N$-es mátrix, amelynek a mellékátlójában ezek a számok állnak, mindenhol máshol nullák?

4. Legyen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$. Adjuk meg a

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

valós mátrix komplexifikáltjának a Jordan-féle alakját.

5. Adjuk meg a legfeljebb $(N-1)$-ed fokú komplex polinomok vektorterén a 37.5.3. feladatban szereplő lineáris leképezések Jordan-féle alakját.

6. Igazoljuk, hogy ha $\boldsymbol{A}$ egy komplex vektortér olyan operátora, amelynek valahanyadik hatványa diagonalizálható, akkor $\boldsymbol{A}$ maga is diagonalizálható. Adjunk példát arra, hogy valós vektortér esetén ez nem feltétlenül igaz.

7. Értelmezzük az $\boldsymbol{A}$ operátor exponenciálását így: $\exp(\boldsymbol{A}) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$. Mutassuk meg, hogy ez és a 39.6-beli értelmezés megegyezik a 39.2. $(*)$ alakú operátorokra.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha 39.6. szerint értelmes $f(\boldsymbol{A})$ és $g(\boldsymbol{A})$, akkor értelmes $(fg)(\boldsymbol{A})$ és egyenlő $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})$-val. Mutassuk meg ennek alapján, hogy ha $\boldsymbol{A}$ injektív (tehát egyben bijektív is), akkor $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}}(\boldsymbol{A})$.

9. Vegyük a diagonalizálható operátor 39.5. $(*)$ alakját. Igazoljuk, hogy minden $i = 1, \ldots, n$ esetén van olyan p_i polinom, hogy $p_i(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}_i$. (Útmutatás: tekinsük a $\prod\limits_{i \neq j = 1}^{n} \dfrac{\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$ polinomokat.)

10. Ha $\boldsymbol{A}$ diagonalizálható, és a $\boldsymbol{B}$ operátor felcserélhető $\boldsymbol{A}$-val, akkor $\boldsymbol{B}$ felcserélhető az $\boldsymbol{A}$ minden függvényével. Ennek és az előző feladatnak az alapján lássuk be, hogy $\boldsymbol{B}$ akkor és csak akkor cserélhető fel a 39.5. $(*)$ alakú operátorral, ha $\boldsymbol{B}$ felcserélhető minden $\boldsymbol{P}_i$-vel.

40. Operátorok spektruma skalárszorzatos téren

40.1. Most feltesszük, hogy a $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortéren adott egy $\langle\ ,\ \rangle$ skaláris szorzat, vagyis egy olyan $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ leképezés, amelyre minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén

(i) $\langle \boldsymbol{x}, \cdot\ \rangle$ lineáris,

(ii) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^*$,

(iii) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor $(\mathbf{V}, \mathbb{R}, \langle\ ,\ \rangle)$ euklideszi tér. Következő eredményeink szinte nyilvánalóan igazak bármely $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \boldsymbol{b})$ euklideszi vektortérre, hiszen ebből egyértelműen származtatható egy fenti formájú, és viszont.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor a 35. fejezetben tárgyalt komplex skaláris szorzatos térrel van dolgunk.

Az $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ normáját így értelmezzük: $\|\boldsymbol{x}\|^2 := \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$.

40.2. Az $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ operátor adjungáltját az

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V})$$

egyenlőség értelmezi.

Az $\boldsymbol{S}$ operátort a valós esetben **szimmetrikusnak**, a komplex esetben **önadjungáltnak** szokás hívni, ha

$$\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S}.$$

Összefoglaló elnevezésül most az önadjungált jelzőt használjuk.

Az $\boldsymbol{U}$ operátort a valós esetben **ortogonálisnak**, a komplex esetben **unitérnek** szokás hívni, ha

$$\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}^{-1}.$$

Összefoglaló elnevezésül most az unitér jelzőt használjuk. Emlékeztetünk, hogy egy operátor pontosan akkor unitér, ha skalárszorzattartó, ami azzal egyenértékű, hogy izometrikus (32.11. és 35.4.). Bevezetünk még egy fontos operátor-típust: az $\boldsymbol{N}$ operátor **normális**, ha

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^* = \boldsymbol{N}^*\boldsymbol{N}.$$

Nyilván mind az önadjungált, mind az unitér operátorok normálisak.

A normális operátorok fontos tulajdonsága, hogy minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}\|^2 &= \langle \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{N}^*\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{N}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{N}^*\boldsymbol{x} \rangle = \\ &= \|\boldsymbol{N}^*\boldsymbol{x}\|^2.\end{aligned}$$

40.3. Állítás *Ha az* $\mathbf{M}$ *altér invariáns az* $\boldsymbol{A}$ *operátorra, akkor* $\mathbf{M}^\perp$ *invariáns* $\boldsymbol{A}^*$*-ra.*

Bizonyítás Minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$ és $\boldsymbol{y} \in \mathbf{M}^\perp$ esetén $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ortogonális $\boldsymbol{y}$-ra, azaz $0 = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$, így $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}$ ortogonális $\boldsymbol{x}$-re. ■

Ha tehát az $\mathbf{M}$ altér invariáns az $\boldsymbol{S}$ önadjungált operátorra, akkor $\mathbf{M}^\perp$ is az, így $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\perp)$ redukálja $\boldsymbol{S}$-et.

Ugyanez igaz unitér operátorra is: ha $\mathbf{M}$ invariáns $\boldsymbol{U}$-ra, akkor $\boldsymbol{U}|_{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ bijekció, vagyis $\mathbf{M}$ invariáns $\boldsymbol{U}^{-1}$-re is; következésképpen $\mathbf{M}^\perp$ invariáns az $(\boldsymbol{U}^{-1})^* = \boldsymbol{U}^{**} = \boldsymbol{U}$ operátorra.

Normális operátorra is elmondható ez, de meglehetősen körülményesen bizonyítható; ennél kevesebb is elég lesz a továbbiakban.

40.4. 1. Állítás *Ha $\mathbf{E}_\lambda$ az $\boldsymbol{N}$ normális operátor λ sajátértékű sajátaltere, akkor $(\mathbf{E}_\lambda, \mathbf{E}_\lambda^\perp)$ redukálja $\boldsymbol{N}$-et.*

Bizonyítás $\mathbf{E}_\lambda$ invariáns $\boldsymbol{N}$-re; elég megmutatnunk, hogy invariáns $\boldsymbol{N}^*$-ra is, hiszen ekkor $\mathbf{E}_\lambda^\perp$ invariáns az $\boldsymbol{N}^{**} = \boldsymbol{N}$ operátorra. Íme: ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}_\lambda$, akkor $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}^*\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}^*\boldsymbol{N}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{N}^*\boldsymbol{x}$, azaz $\boldsymbol{N}^*\boldsymbol{x}$ is $\mathbf{E}_\lambda$-ban van. ■

A 37.3.2. állításából és az előző eredményből azonnal adódik:

2. Állítás *Normális operátor minden sajátértékének az algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő; következésképpen komplex vektortéren értelmezett normális operátor diagonalizálható.*

40.5. Állítás *Legyen $\boldsymbol{N}$ normális operátor. Ekkor*

(i) $\boldsymbol{N}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ egyenértékű azzal, hogy $\boldsymbol{N}^*\boldsymbol{x} = \lambda^*\boldsymbol{x}$,

(ii) $\boldsymbol{N}$ különböző sajátértékű sajátalterei ortogonálisak egymásra.

Bizonyítás (i) $\boldsymbol{N} - \lambda\mathbf{I}$ is normális, ezért a 40.2. végén mondottak szerint $\|(\boldsymbol{N} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{x}\|^2 = \|(\boldsymbol{N} - \lambda\mathbf{I})^*\boldsymbol{x}\|^2 = \|(\boldsymbol{N}^* - \lambda^*\mathbf{I})\boldsymbol{x}\|^2$.

(ii) Ha λ és μ az $\boldsymbol{N}$ különböző sajátértékei, $\boldsymbol{x}$ illetve $\boldsymbol{y}$ hozzájuk tartozó sajátvektorok, akkor

$$\mu\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{y}\rangle = \langle\boldsymbol{N}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle\lambda^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \lambda\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle,$$

és ez csak úgy állhat fönn, ha $\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$.

40.6. Állítás

(i) Önadjungált operátor sajátértékei valósak.

(ii) Unitér operátor sajátértékei egységnyi abszolútértékűek.

Bizonyítás (i) Ha $\boldsymbol{S}$ önadjungált, és $\boldsymbol{S}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, akkor $\lambda\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}\rangle = \langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}\rangle$, és $\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}\rangle$ valós, hiszen ha a vektortér valós, akkor eleve az, egyébként pedig $\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}\rangle^* = \langle\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}\rangle$.

(ii) Ha $\boldsymbol{U}$ unitér, és $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, akkor $\|x\| = \|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$.

40.7. Feladatok

1. Adjunk példát olyan operátorra, amelynek vannak különböző sajátértékhez tartozó nem ortogonális sajátvektorai.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy komplex skaláris szorzatos vektortér operátora pontosan akkor normális, ha a valós és a képzetes része (lásd 35.4.) felcserélhetők egymással.

3. Adjunk példát olyan normális operátorra, amely nem önadjungált és nem unitér.

4. Bármilyen $\boldsymbol{A}$ operátor és egységnyi abszolútértékű α, β komplex számok esetén $\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{A}^*$ normális.

5. Igazoljuk, hogy ha minden $\boldsymbol{x}$ vektorra $\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}\|$, akkor $\boldsymbol{A}$ normális.

6. A determináns és az adjungált 35.3-ban adott összefüggése alapján mutassuk meg, hogy bármely $\boldsymbol{A}$ operátorra $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A}^*) = (\mathrm{Sp}\boldsymbol{A})^*$, azaz $\boldsymbol{A}^*$ sajátértékei az $\boldsymbol{A}$ sajátértékeinek a konjugáltja.

7. Mutassuk meg, hogy ha az $\boldsymbol{S}$ önadjungált operátor pozitív definit, azaz $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Sx}\rangle > 0$ minden $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}$ esetén, akkor $\boldsymbol{S}$ sajátértékei pozitívak. Ha pedig pozitív szemidefinit, azaz $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Sx}\rangle \geq 0$ minden $\boldsymbol{x}$ esetén, akkor $\boldsymbol{S}$ sajátértékei nemnegatívak.

8. Legyen $\boldsymbol{S}$ és $\boldsymbol{T}$ pozitív definit önadjungált operátor. Igazoljuk, hogy $\boldsymbol{ST}$ sajátértékei pozitívak. (Útmutatás: $\boldsymbol{STx} = \lambda\boldsymbol{x}$, $0 < \langle \boldsymbol{Tx}, \boldsymbol{STx}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{Tx}, \boldsymbol{x}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Tx}\rangle$.)

41. A spektráltétel

41.1. A komplex vektortéren értelmezett $\boldsymbol{N}$ normális operátor diagonalizálható, ezért 39.5. $(*)$ alakú; a normális operátor különböző sajátalterei ortogonálisak egymásra, ezért a formulában szereplő projektorok önadjungáltak (ortogonális vetítések). A mondottakat a következőképp foglalhatjuk össze.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{N}$ egy komplex skaláris szorzatos vektortér normális operátora. Ekkor egyértelműen léteznek*

– *egy n természetes szám,*
– *$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ különböző komplex számok,*
– *$\boldsymbol{P}_1, \dots, \boldsymbol{P}_n$ ortogonális projektorok úgy, hogy $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j = \mathbf{0}$, ha $i \neq j$ és $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i = \mathbf{I}$,*

és ezekkel

$$\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{P}_i. \qquad (*)$$

Ekkor $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \mathrm{Sp}\boldsymbol{N}$, és minden $i = 1, \dots, n$ esetén
(i) $\mathbf{E}_{\lambda_i} = \mathrm{Ran}\boldsymbol{P}_i$,
(ii) $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{P}_i$.

A normális operátor $(*)$ alakját az $\boldsymbol{N}$ **spektrális előállításnak** nevezzük.

Az $\boldsymbol{N}$ normális operátor diagonalizálása unitér koordinátázással (lásd 35.6.)

történik: választható az $\boldsymbol{N}$ sajátvektoraiból álló $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ ortonormált bázis, és az ennek megfelelő koordinátázásban lesz az $\boldsymbol{N}$ mátrixa diagonális.

41.2. Ha $\mathbf{V}$ valós skaláris szorzatos vektortér, és $\boldsymbol{S}$ szimmetrikus operátor, akkor $\boldsymbol{S}_{\mathbb{C}}$ önadjungált, így minden sajátértéke valós; 37.4. szerint $\boldsymbol{S}$-nek is vannak sajátértékei, sőt $\mathrm{Sp}\boldsymbol{S} = \mathrm{Sp}\boldsymbol{S}_{\mathbb{C}}$. $\boldsymbol{S}$ sajátalterei merőlegesek egymásra, minden sajátértékének az algebrai és a geometriai multiplicitása megegyezik. $\boldsymbol{S}_{\mathbb{C}}$ sajátalterei $\mathbf{E}_\lambda + i\mathbf{E}_\lambda$ alakúak ahol $\mathbf{E}_\lambda$ az $\boldsymbol{S}$ sajátaltere. $\boldsymbol{S}_{\mathbb{C}}$ sajátalterei kifeszítik $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$-t, így $\boldsymbol{S}$ sajátalterei kifeszítik $\mathbf{V}$-t.

Ezért valós skaláris szorzatos tér szimmetrikus operátorára az előbbi formában igaz a spektráltétel; speciálisan, minden szimmetrikus operátor diagonalizálható, méghozzá ortogonális koordinátázással.

41.3. Ha $\mathbf{V}$ valós skaláris szorzatos vektortér és $\boldsymbol{N}$ normális operátor (de nem szimmetrikus), akkor a 28.7.3 (iii) összefüggés miatt $\boldsymbol{N}_{\mathbb{C}}$, az $\boldsymbol{N}$ komplexifikáltja is normális, így diagonalizálható. Ezért minden igaz $\boldsymbol{N}$-re, amit 39.4-ben elmondtunk, de a skaláris szorzat jelenléte miatt egy kicsivel ki is egészíthetjük azokat.

Az $\boldsymbol{N}_{\mathbb{C}}$-nek a λ nem valós sajátértékű $\boldsymbol{z}$ sajátvektora és λ^* sajátértékű $\boldsymbol{z}^*$ sajátvektora ortogonális egymásra, hiszen $\lambda \neq \lambda^*$. Tehát a $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ előállítással $0 = \langle \boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}\rangle_{\mathbb{C}} = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2 + i(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle)$, amiből (lévén a valós skaláris szorzat szimmetrikus) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$ és $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{y}\|^2$; továbbá tudjuk azt is, hogy $\|\boldsymbol{z}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$. Tehát $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ merőlegesek egymásra, és $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|\boldsymbol{z}\|$.

Ha tehát λ az $\boldsymbol{N}_{\mathbb{C}}$-nek m multiplicitású nem valós sajátértéke, és $(\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{x}_k + i\boldsymbol{y}_k \mid k = 1, \dots, m)$ a hozzá tartozó sajátalterének ortonormált indexezett bázisa, akkor $(\sqrt{2}\boldsymbol{x}_1, \sqrt{2}\boldsymbol{y}_1, \dots, \sqrt{2}\boldsymbol{x}_m, \sqrt{\boldsymbol{y}_m})$ ortonormált bázisa az eredeti valós $\mathbf{V}$ vektortér egy $\mathbf{M}$ alterének, amely invariáns $\boldsymbol{N}$-re.

Speciálisan tekinsünk egy $\boldsymbol{U}$ ortogonális operátort. Ekkor $\boldsymbol{U}_{\mathbb{C}}$ unitér. $\boldsymbol{U}$ sajátértékei $+1$ és -1 lehetnek.

Ha $\lambda = \alpha + i\beta$ az $\boldsymbol{U}_{\mathbb{C}}$-nek nem valós sajátértéke, akkor $|\lambda|^2 = 1$, tehát $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Ezért van egyetlen olyan $\phi \in]-\pi, \pi[$, hogy $\alpha = \cos\phi$, $\beta = \sin\phi$. Ez azt jelenti, hogy ha $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ az $\boldsymbol{U}_{\mathbb{C}}$-nek a λ sajátértékű sajátvektora, akkor $\boldsymbol{U}$ leszűkítése az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ generálta síkra éppen a ϕ szögű forgatás (lásd 8.2. (viii)).

$\boldsymbol{U}_{\mathbb{C}}$-nek a sajátvektoraiból álló ortonormált bázisra vonatkozó diagonális mátrixa olyan, hogy a főátlóban 1-esek állnak (annyiszor, amennyi az 1 sajátérték multiplicitása), aztán -1-esek (annyiszor, amennyi a -1 sajátérték multiplicitása), majd

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

alakú (diagonális) blokkok következnek különféle ϕ-kkel (amelyek között persze azonosak is lehetnek).

Ennek megfelelően $\mathbf{V}$ egy alkalmasan választott ortonormált bázisában az $\boldsymbol{U}$

mátrixa olyan, hogy az $\boldsymbol{U}_{\mathbb{C}}$ mátrixában a fenti blokkot a

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

blokkra cseréljük ki.

41.4. Tekintsünk egy $\boldsymbol{A}$ operátort egy $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortéren. A $\mathbf{V}$-n sokféleképpen lehet skaláris szorzatot megadni. Az $\boldsymbol{A}$ operátor sajátértékei, azok algebrai és geometriai multiplicitása független attól, adtunk-e meg skaláris szorzatot, és ha igen, hogyan. Az is független a skaláris szorzattól, diagonalizálható-e az operátor vagy sem. Ezt ezért érdemes hangsúlyozni, mert a spektráltétel skaláris szorzatos vektortéren értelmezett normális operátorra vonatkozik, és úgy tűnhet, a skaláris szorzat szerepet játszik abban, hogy a normális operátor diagonalizálható. Nem így van.

Egy operátor adjungáltja különféle skaláris szorzatokra vonatkozóan más és más. Hogy egy operátor normális-e vagy sem, függ a skaláris szorzattól. Egy nemdiagonalizálható komplex operátor semmilyen skaláris szorzatban sem lehet normális. Ha viszont az operátor diagonalizálható, akkor van olyan skaláris szorzat, amelyre normális: vegyünk az operátor sajátvektoraiból álló bázist, és definiáljuk úgy a skaláris szorzatot, hogy ez a bázis legyen ortonormált.

A spektráltételt így is kamatoztathatjuk: adott egy $\boldsymbol{A}$ komplex operátor; ha találunk olyan skaláris szorzatot, amelyre $\boldsymbol{A}$ normális, akkor $\boldsymbol{A}$ diagonalizálható. Hasonlóképpen, ha $\boldsymbol{A}$ valós operátor, és találunk olyan skaláris szorzatot, amelyre $\boldsymbol{A}$ szimmetrikus, akkor $\boldsymbol{A}$ diagonalizálható.

41.5. Lássuk a mondottaknak egy érdekes fontos alkalmazását. Legyen $\mathbf{V}$ valós vektortér. Mint tudjuk, egy $\boldsymbol{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^\star$ illetve egy $\boldsymbol{S} : \mathbf{V}^\star \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés szimmetrikussága, pozitív definitása stb. értelmes (lásd 14.7. és 18.2.). Ugyanakkor ezeknek a leképezéseknek a sajátértéke nem értelmes fogalom. Egy $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés sajátértékeiről értelmes beszélni, de szimmetrikusságáról, pozitív definitásáról stb. nem (ha nincs adva skaláris szorzat $\mathbf{V}$-n).

Állítás *Legyen* $\mathbf{V}$ *valós vektortér,* $\boldsymbol{T} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\star)$ *szimmetrikus és negatív szemidefinit,* $\boldsymbol{S} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}^\star, \mathbf{V})$ *szimmetrikus és pozitív definit. Ekkor* $\boldsymbol{ST} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$

– minden sajátértékének az algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik,

– nem nulla sajátértékei negatívak.

Bizonyítás Ekkor ugyanis $\boldsymbol{S}^{-1} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\star)$ is szimmetrikus és pozitív definit. Következésképpen

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := (\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{x} | \boldsymbol{y})$$

skaláris szorzat $\mathbf{V}$-n. $\boldsymbol{ST}$ szimmetrikus és negativ szemidefinit erre a skalárszorzatra nézve, ugyanis

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{STy}\rangle = (\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{STy}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{STy}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{Ty}) = (\boldsymbol{Tx}|\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{STx}, \boldsymbol{y}\rangle$$

és

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{STx}\rangle = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{Tx}) \le 0.$$

Találtunk tehát egy olyan skaláris szorzatot, amelyre nézve az operátor szimmetrikus és negatív szemidefinit: ebből már az előzőekben mondottak és a 40.7.7. feladat alapján következik, amit állítottunk.

41.6. Egy másik érdekes és fontos alkalmazás az, hogy akár valós, akár komplex skaláris szorzatos vektortéren bármely operátor felírható egy unitér operátor és egy pozitív szemidefinit önadjungált operátor szorzataként (ez arra emlékeztet, hogy minden komplex szám (speciálisan valós is) felírható egy egységnyi abszolútértékű komplex szám és egy nem negatív valós szám szorzataként).

Állítás *Legyen* $\boldsymbol{A}$ *a* $\mathbf{V}$ *skaláris szorzatos vektortér operátora. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott* $|\boldsymbol{A}|$ *önadjungált, pozitív szemidefinit operátor, és egy* $\boldsymbol{U}$ *unitér operátor, amely* $\mathrm{Ran}|\boldsymbol{A}|$*-n egyértelmű, úgy, hogy*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}|\boldsymbol{A}|.$$

Bizonyítás Az adjungálás tulajdonságai miatt $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ önadjungált, és pozitív szemidefinit, hiszen $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Ax}\rangle = \langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}\rangle \ge 0$. Ezért egyrészt $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ diagonalizálható, másrészt a sajátértékei nemnegatívak, így a 39.5. szerint értelmes a négyzetgyöke,

$$|\boldsymbol{A}| := \sqrt{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}},$$

amely ugyancsak önadjungált, pozitív szemidefinit.

Definiáljuk $\boldsymbol{U}$-t az $|\boldsymbol{A}|$ értékkészletén úgy, ahogy kell: $\boldsymbol{U}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x} := \boldsymbol{Ax}$. Meg kell mutatni, persze, hogy ez az értelmezés jó: ha $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{y}$, akkor $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Ay}$. Átrendezve és átnevezve: azt kell megmutatnunk, hogy ha $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, akkor $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$. Íme: ha $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, akkor $0 = \langle |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, |\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Ax}\rangle = \langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}\rangle = \|\boldsymbol{Ax}\|^2$, amiből $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

Ezzel egyben azt is beláttuk, hogy $\boldsymbol{U}$ izometrikus: $\|\boldsymbol{U}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}\|^2 = \||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}\|^2$.

Semmi más teendőnk nincs, mint $\boldsymbol{U}$-t kiterjeszteni az egész $\mathbf{V}$-re unitér operátorrá azáltal, hogy megadunk egy $(\mathrm{Ran}|\boldsymbol{A}|)^\perp \to (\mathrm{Ran}\boldsymbol{A})^\perp$ izometrikus leképezést.

Látjuk, hogy $\boldsymbol{U}$ egyértelmű az $|\boldsymbol{A}|$ értékkészletén. Azt kell csak igazolnunk, hogy $|\boldsymbol{A}|$ az egyetlen olyan pozitív szemidefinit önadjungált operátor, amelyet egy unitérrel szorozva $\boldsymbol{A}$-t kapjuk. Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LS}$, ahol $\boldsymbol{L}$ unitér, $\boldsymbol{S}$ önadjungált. Ekkor $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{SL}^*\boldsymbol{LS} = \boldsymbol{S}^2$, amiből $\boldsymbol{S} = \sqrt{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}}$.

41.7. Végül egy fontos megjegyzést teszünk, hogy esetleges tévedéseket kiküszöböljünk.

Vegyünk egy $N \times N$-es, valós, szimmetrikus $\boldsymbol{M}$ mátrixot; például, konkrét szemléltetésül, legyen

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az $\boldsymbol{M}$ mátrixnak mint a $\langle\ ,\ \rangle$ skaláris szorzatra nézve szimmetrikus $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris leképezésnek a sajátvektoraiból álló bázisban a mátrixa olyan diagonális, amelyben a főátlóban a sajátértékek szerepelnek. Például az előbb említett konkrét esetben ez

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ugyanakkor az $\boldsymbol{M}$ mátrixot a 17.8. szerint $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris formának is felfoghatjuk, az itteni jelöléssel a

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{\eta} \rangle$$

hozzárendeléssel. Mint ilyennek, van szerinte ortogonális bázis, és ilyen bázisban a mátrixa olyan diagonális, amelyben a főátlóban 0, -1 és 1 állhat. A konkrét példánkban ez

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ugyanannak a mátrixnak tehát két különböző diagonális alakja is van! Nézzünk utána alaposan, miről van szó.

Az $(\mathbb{R}^N)^\star \equiv \mathbb{R}^N$ azonosítás miatt különböző objektumok azonos formában jelennek meg. A fönn-lenn indexezéssel tudunk különbséget tenni $\mathbb{R}^N$ és a duálisa között, azonban, mint említettük a 15. fejezetben, mátrix formában megadott konkrét lineáris leképezésekre ez az indexelés hasznavehetetlen.

Az első esetben – amikor a mátrix egy $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris leképezést reprezentál, amely szimmetrikus a $\langle\ ,\ \rangle$ skaláris szorzatra vonatkozóan –, akkor fönn-lenn indexes mennyiségnek kell tekinteni, és így egy $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázisban a mátrixa

$$(\langle \boldsymbol{r}^i, \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_k \rangle \mid i, k = 1, \dots, N),$$

ahol $(\boldsymbol{r}^1, \dots, \boldsymbol{r}^N)$ a szóban forgó bázis reciprok vektorrendszere, azaz $\langle \boldsymbol{r}^i, \boldsymbol{v}_k \rangle = \delta^i{}_k$. Ekkor *csak* a sajátvektorokból álló bázisban lesz $\boldsymbol{M}$ mátrixa diagonális – a speciális példát tekintve – (1) alakú.

A második esetben – amikor a mátrix egy $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris formát reprezentál (vagy, ha úgy akarjuk, a 17.6-beli azonosítás szerint egy

$\mathbb{R}^N \to (\mathbb{R}^N)^\star$ lineáris leképezést) –, akkor lenn-lenn indexes mennyiségnek kell tekinteni, és a $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázisban a mátrixa

$$(\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_k\rangle \mid i, k = 1, \dots, N).$$

Ekkor nagyon sok $\boldsymbol{M}$-ortogonális bázis van, $\boldsymbol{M}$ *mindben* diagonális – a speciális példát tekintve – (2) alakú. Például, ha $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ ilyen bázis, és $\boldsymbol{T}$ olyan mátrix, amelyre $\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}$, akkor $(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_N)$ is ilyen bázis, ugyanis $\langle \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_k\rangle = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_k\rangle = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_k\rangle$.

Legyen $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ az $\boldsymbol{M}$ mátrixnak mint $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris leképezésnek a sajátvektoraiból álló ortogonális bázis (ilyen van), $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$, ahol a λ_i-k nem szükségképpen különbözők (mindegyik annyiszor fordul elő, amennyi a multiplicitása). Ennek a bázisnak a reciprokrendszere $\boldsymbol{r}^i := \dfrac{\boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{v}_i|^2}$ $(i = 1, \dots N)$, tehát $\boldsymbol{M}$-nek mint $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris leképezésnek a mátrixa ebben a bázisban

$$\langle \boldsymbol{r}^i, \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_k\rangle = \lambda_i \delta^i{}_k,$$

és mint mondtuk, csak ilyen bázisban lesz diagonális; figyeljük meg, a bázisvektorok hossza lényegtelen.

Válasszuk úgy a sajátvektorokat, hogy

$$|\boldsymbol{v}_i| := \begin{cases} \text{tetszőleges}, & \text{ha } \lambda_i = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \text{ha } \lambda_i \neq 0 \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, N).$$

Ekkor – de csak ekkor – $(\boldsymbol{v}_1 \dots, \boldsymbol{v}_N)$ egyben $\boldsymbol{M}$-ortogonális bázis is lesz:

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_k\rangle = (\mathrm{sign}\lambda_i)\delta_{ik}.$$

Megismételjük, ennek a bázisnak megfelelő transzformáltjai is az $\boldsymbol{M}$ mint szimmetrikus bilineáris forma szerint ortogonálisak lesznek, tehát az $\boldsymbol{M} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ bilineáris forma diagonális mátrixú az ilyen transzformált bázisban, az $\boldsymbol{M} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris leképezés azonban nem (kivéve persze, ha a transzformált bázis elemei is sajátvektorok).

41.8. Feladatok

1. Adjuk meg az

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

önadjungált mátrix spektrálelőállítását, majd diagonalizáljuk.

2. Igazoljuk a spektráltétel segítségével, hogy a 40.7.7. feladat fordítottja is igaz: ha az $\boldsymbol{S}$ önadjungált operátor sajátértékei pozitívak (nemnegatívak), akkor $\boldsymbol{S}$ pozitív (szemi)definit.

3. Adjuk meg $\mathbb{K}^N$-en a

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto \sum_{k=1}^{N} k\xi_k^* \eta_k$$

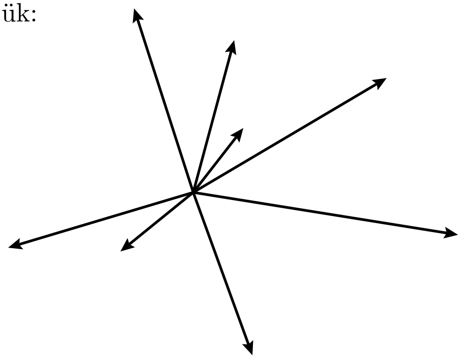
skalárszorzatot. Mi lesz az $\boldsymbol{A}$ mátrix adjungáltja erre a skaláris szorzatra? Mik lesznek az önadjungált operátorok?

4. Jellemezzük $\mathbb{R}^2$-n a normális operátorokat (vagyis azokat a 2×2-es valós mátrixokat, amelyek felcserélhetők a transzponáltjukkal).

5. Jellemezzük $\mathbb{C}^2$-n a normális operátorokat (vagyis azokat a 2×2-es komplex mátrixokat, amelyek felcserélhetők a transzponáltjuk konjugáltjával).

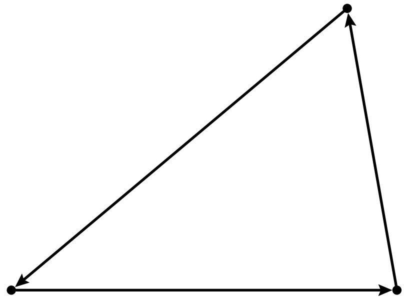
VIII. AFFIN TEREK

A vektorok mintájául fizikai terünk irányított szakaszai szolgálnak. A fizikai terünk pontjai maguk azonban nem feleltethetők meg természetes módon egy vektortér pontjainak. Viszont a fizikai tér bármely indexezett pontpárjához rendelhetünk egy vektort, egészen különböző pontpárokhoz is ugyanazt a vektort. A hozzárendelés alapvető tulajdonsága, hogy bármiképp is válasszunk egy pontot a térből, az összes lehetséges irányított szakaszt megkapjuk úgy, hogy ez a pont legyen a kezdőpontjuk, és ha a végpontjuk más, az irányított szakaszok is mások. Ezt így szemléltethetjük:



9. ábra

További alaptulajdonság, hogy három pontból választott pontpárokhoz megfelelő rendben hozzárendelt három vektor összege nulla:



10. ábra

Ezeket a tulajdonságokat megtestesítő matematikai fogalom az affin tér.

42. Affin terek

42.1. Definíció *A* $(V, \mathbf{V}, -)$ *hármast* ***affin térnek*** *hívjuk, ha*

(i) V *nem üres halmaz,*

(ii) $\mathbf{V}$ *vektortér,*

(iii) $- : V \times V \to \mathbf{V}$ *leképezés, amelyet* $(x, y) \mapsto x - y$ *formában írunk,* ***kivonásnak*** *hívunk, és a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

(I) minden $y \in V$ *esetén* $O_y : V \to \mathbf{V}$, $x \mapsto x - y$ *bijekció,*

(II) minden $x, y, z \in V$ *esetén*

$$(x - y) + (y - z) + (z - x) = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{V}$*-t a* V *affin tér* ***alatti vektortérnek*** *hívjuk, és azt is mondjuk, hogy* V *affin tér a* $\mathbf{V}$ *vektortér fölött.*

Az affin tér ***dimenziója*** *az affin tér alatti vektortér dimenziója. Az affin tér* ***irányított****, ha az alulfekvő vektortér irányított (tehát egyben szükségszerűen valós és véges dimenziós).*

A matematikában elterjedt szokás szerint a továbbiakban az affin teret (mint a vektorteret is) egyetlen betűvel jelöljük,

Állítás *Legyen* V *affin tér. Ekkor*

(i) $x - y = \mathbf{0}$ *pontosan akkor, ha* $x = y$,

(ii) $x - y = -(y - x)$ *minden* $x, y \in V$ *esetén,*

(iii) ha $n \in \mathbb{N}$ *és* $x_1, \ldots, x_n \in V$, *akkor*

$$(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_1) = \mathbf{0}.$$

Bizonyítás (i) A definíció (II) pontjában $y := z := x$ választással $3(x - x) = \mathbf{0}$, azaz $x - x = \mathbf{0}$. Az (I) tulajdonság szerint viszont, ha $x \neq y$, akkor $x - y \neq \mathbf{0}$.

(ii) A (II) tulajdonságból $z := x$ választással kapjuk a kívánt eredményt.

(iii) Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1, 2, 3$ esetére már tudjuk, hogy igaz az egyenlőség. Tegyük fel, hogy n-re igaz. Ekkor

$$(x_1 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_1) =$$
$$\big((x_1 - x_2) + + \cdots + (x_n - x_1)\big) + \big((x_1 - x_n) + (x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_1)\big) = \mathbf{0}. \blacksquare$$

Eredményünk következménye az átzárójelezhetőség:

$$(x - y) + (u - v) = (x - v) + (u - y).$$

42.2. Jegyezzük meg, hogy az előző állítás (ii) pontjában a $-$ jel két különböző dolgot jelöl. A zárójelen belül az affin térbeli kivonást, a zárójelen kívül viszont az alulfekvő vektortérbeli kivonást. Ez a kis pongyolaság nem okoz zavart, ha ügyelünk, viszont igen célszerű; annyira, hogy még meg is tetézzük.

Adott $y \in V$ esetén az 0_y inverzét így jelöljük:

$$\mathbf{V} \to V, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto y + \boldsymbol{x}. \tag{$*$}$$

Tehát a definíció szerint

$$y + (x - y) = x \qquad (x, y \in V), \tag{$**$}$$

továbbá egyszerű meggondolás adja, hogy

$$(x + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y} = x + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \qquad (x \in V, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}).$$

Itt a bal oldalon mindkét összeadás a $(*)$ szerinti műveletet jelöli, a jobb oldalon a zárójelen kívül is ezt, a zárójelen belül azonban a $\mathbf{V}$-beli összeadást.

Összefoglalva tehát:

(i) a vektoroknak van összege, különbsége, számszorosa, ezek mind vektorok;

(ii) az affin tér elemeinek van különbsége, ez vektor (nincs összegük, számszorosuk);

(iii) egy affin térbeli elemnek és egy vektornak van összege, ez az affin tér eleme.

Az összeadással és a kivonással a megszokott szabályok szerint számolhatunk, de csak olyan átalakítás végezhető el – erre ügyelnünk kell –, amely a fentiek szerint értelmes. Az előző pont végén szereplő bal oldalt nem zárójelezhetjük át akárhogy, például $(x + u) - (y + v)$ nem értelmes; hasonlóan, $(**)$-ban sem zárójelezhetünk át, $(y + x) - y$ nem értelmes.

42.3. Lássunk példát affin térre!

(i) Egy $\mathbf{V}$ vektortér önmaga fölött a vektori kivonással affin tér. Tehát minden vektortér egyben affin tér is.

(ii) Legyen $\mathbf{M}$ a $\mathbf{V}$ vektortér nem triviális lineáris altere és $\boldsymbol{x} \notin \mathbf{M}$. Ekkor $\boldsymbol{x} + \mathbf{M}$, az $\mathbf{M}$-nek az $\boldsymbol{x}$-szel való eltoltja, a vektori kivonással affin tér $\mathbf{M}$ fölött, de nem vektortér a $\mathbf{V}$-beli műveletekkel.

(iii) Legyen $\mathbf{P}$ a polinomk vektortere. Ekkor $\{p \in \mathbf{P} \mid p(0) = p(1) = 1\}$ a pontonkénti kivonással affin tér a $\{p \in \mathbf{P} \mid p(0) = p(1) = 0\}$ vektortér fölött.

(iv) Legyen T nem üres halmaz, $\mathbf{V}$ vektortér, S a T nem üres részhalmaza, $\boldsymbol{x}_0$ a $\mathbf{V}$ eleme. Ekkor $\{f \in \mathbf{V}^T \mid f(s) = \boldsymbol{x}_0 \ (s \in S)\}$ a pontonkénti kivonással affin tér a $\{f \in \mathbf{V}^T \mid f(s) = \mathbf{0} \ (s \in S)\}$ vektortér fölött.

(v) Ha V_i affin tér a $\mathbf{V}_i$ vektortér fölött $(i \in I)$, akkor $\underset{i \in I}{\times} V_i$ affin tér $\underset{i \in I}{\times} \mathbf{V}_i$ fölött az $(x_i)_{i \in I} - (y_i)_{i \in I} := (x_i - y_i)_{i \in I}$ kivonással.

42.4. Az affin tér elemeinek lineáris kombinációja általában nem értelmezhető, hiszen nincs számszorosuk és összegük. Értelmezhető viszont egy ”speciális lineáris kombinációjuk”, az affin kombináció.

Állítás *Legyen F véges indexhalmaz, $x_i \in V$ és $\alpha_i \in \mathbb{K}$; ez utóbbiak olyanok, hogy $\sum_{i \in F} \alpha_i = 1$. Ekkor van egyetlen olyan $x_0 \in V$, hogy $\sum_{i \in F} \alpha_i (x_i - x_0) = \mathbf{0}$.*

Bizonyítás Legyen x a V tetszőleges eleme, és $x_0 := x + \sum_{k \in F} \alpha_k (x_k - x)$. Ekkor

$$\sum_{i \in F} \alpha_i (x_i - x_0) = \sum_{i \in F} \alpha_i \left((x_i - x) - \sum_{k \in F} \alpha_k (x_k - x) \right) =$$
$$= \sum_{i \in F}^{n} \alpha_i (x_i - x) - \sum_{i \in F} \alpha_i \sum_{k \in F} \alpha_k (x_k - x) = \mathbf{0}.$$

A kívánt tulajdonságú x_0 tehát létezik. Tegyük fel, x_0' is ugyanolyan tulajdonságú. Ekkor

$$\mathbf{0} = \sum_{i \in F} \alpha_i (x_i - x_0) - \sum_{i \in F} \alpha_i (x_i - x_0') = \sum_{i \in F} \alpha_i \big((x_i - x_0) - (x_i - x_0') \big) =$$
$$= \sum_{i \in F} \alpha_i (x_0' - x_0) = x_0' - x_0,$$

azaz $x_0' = x_0$.

Bontsuk föl formálisan a zárójelet a $\sum_{i \in F} \alpha_i (x_i - x_0) = \mathbf{0}$ bal oldalán; azt kapjuk, hogy $\left(\sum_{i \in F} \alpha_i x_i \right) - x_0 = \mathbf{0}$. Ez az átalakítás azonban az eddigi szabályaink szerint nem megengedett, mert az affin térbeli elemeket nem lehet számmal szorozni és összeadni. Viszont ez sugallja az affin kombináció célszerű bevezetését.

Definíció *Az előző állításban szereplő egyértelműen meghatározott x_0-t az x_i elemek α_i $(i \in F)$ együtthatós* ***affin kombinációjának*** *nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum_{i \in F} \alpha_i x_i.$$

Ha speciálisan az együtthatók mind nemnegatívak (tehát szükségképpen a $[0, 1]$ elemei), akkor ***konvex kombinációról*** *beszélünk.*

Ennek megfelelően definiálhatjuk a konvex halmazokat, valamint egy részhalmaz konvex burkát affin térben ugyanúgy, mint vektortérben.

42.5. Definíció *A V affin tér nem üres M részhalmazát* ***affin altérnek*** *nevezzük, ha van olyan $\mathbf{M}$ lineáris altér $\mathbf{V}$-ben, hogy $\{x-y \mid x,y\in M\}=\mathbf{M}$.*

Azt mondjuk, hogy M az $\mathbf{M}$ ***vezette*** *affin altér. M* ***dimenziója*** *az $\mathbf{M}$ dimenziója.*

Egy valós affin tér egy dimenziós affin altereit ***egyenseknek****, a két dimenziósakat* ***síkoknak*** *nevezzük.* ***Hipersík*** *a véges dimenziós affin térben az olyan altér, amelynek a dimeniója eggyel kevesebb az egész tér dimenziójánál.*

Két affin altér ***párhuzamos****, ha olyan lineáris altér vezeti őket, amelyek közül az egyik része a másiknak.*

Igen könnyű meggyőződni arról, hogy az $\mathbf{M}$ vezette M affin altér a V-ből örökölt kivonással affin tér $\mathbf{M}$ fölött.

Ha $\mathbf{M}$ a $\mathbf{V}$ lineáris altere és $x\in V$, akkor $x+\mathbf{M}:=\{x+\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in\mathbf{M}\}$ az egyetlen olyan affin altér, amely átmegy x-en (azaz tartalmazza x-et) és $\mathbf{M}$ vezeti.

V potjai nulla dimenziós affin alterek.

42.6. Egyszerű tény, hogy affin alterek metszete affin altér, ezért értelmes a következő meghatározás.

Definíció *A V affin tér egy nemüres H részhalmazát tartalmazó affin alterek metszetét a H* ***affin burkának*** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy a H affin burka a legszűkebb affin altér, amely tartalmazza H-t.

Állítás *H affin burka egyenlő a H elemeiből készített összes lehetséges affin kombinációk összességével; az alatta fekvő lineáris altér* $\operatorname{Span}\{y-z|y,z\in H\}$.

Bizonyítás Vegyünk a H elemeiből készített két affin kombinációt. Nulla együtthatók alkalmas bevezetésével tekinthetjük úgy, hogy mindkét affin kombináció ugyanazokból az elemekből áll. Két ilyen affin kombináció különbségére, bármely $x\in H$ esetén

$$\sum_{i\in F}\alpha_i x_i-\sum_{i\in F}\beta_i x_i=\left(\sum_{i\in F}\alpha_i x_i-x\right)-\left(\sum_{i\in F}\beta_i x_i-x\right)=$$
$$\sum_{i\in F}\alpha_i(x_i-x)-\sum_{i\in F}\beta_i(x_i-x)=\sum_{i\in F}(\alpha_i-\beta_i)(x_i-x)$$

teljesül, tehát a különbség valóban az említett altér eleme.

Egyszerű tény, hogy bármely rögzített $x\in H$ esetén $\operatorname{Span}\{y-x| \mid y\in H\}=\operatorname{Span}\{\boldsymbol{y}-z|y,z\in H\}$, amiből viszont látszik, hogy ennek a lineáris altérnek minden eleme előáll a H elemeinek affin kombinációiból vett különbségként: ha α_i

$(i \in F)$ akármilyen együtthatók, akkor az $\alpha_0 := 1 - \sum_{i \in F} \alpha_i$, $x_0 := x$ jelöléssel

$$\sum_{i \in F} \alpha_i (x_i - x) = \left(\sum_{i \in F \cup \{0\}} \alpha_i x_i \right) - x_0.$$

Ezzel beláttuk, hogy a H elemeinek összes lehetséges affin kombinációja affin altér a mondott lineáris altér fölött; ez a lineáris altér nyilván a legszűkebb, amely tartalmazza a H elemeiből vett különbségeket, és ezzel befejeztük a bizonyítást.

42.7. Az affin teret **pszeudo-euklideszinek, euklideszinek, Minkowski-félének** mondjuk, ha az alatta fekvő vektortér olyan. Pontosabban, például $(V, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ pszeduo-euklideszi affin tér, ha V affin tér $\mathbf{V}$ fölött, és $(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \boldsymbol{h})$ pszeudo-euklideszi vektortér.

42.8. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az affin tér alábbi definíciója egyenértékű az eredetivel. A $(V, \mathbf{V}, +)$ hármas affin tér, ha

(i) V nem üres halmaz,

(ii) $\mathbf{V}$ vektortér,

(iii) $+ : V \times \mathbf{V} \to V$ leképezés, amelyet $(x, \boldsymbol{x}) \mapsto x + \boldsymbol{x}$ formában írunk, és a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(I) minden $x \in V$ esetén $\mathbf{V} \to V$, $\boldsymbol{x} \mapsto x + \boldsymbol{x}$ bijekció,

(II) minden $x \in V$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ esetén

$$(x + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y} = x + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}). \ \blacksquare$$

2. Legyen $\mathbf{V}$ vektortér. Ekkor $\{1\} \times \mathbf{V}$ a $\mathbb{K} \times \mathbf{V}$ affin altere $\{0\} \times \mathbf{V}$ fölött.

3. Legyen V affin tér $\mathbf{V}$ fölött, és $\mathbf{V} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$. Ekkor V-nek az $\mathbf{N}$ vezette affin alterei affin teret alkotnak $\mathbf{M}$ fölött az

$$(x + \mathbf{N}) - (\boldsymbol{y} + \mathbf{N}) := \boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}(x - y)$$

kivonással, ahol $\boldsymbol{P}_{\mathbf{MN}}$ az $\mathbf{N}$ mentén az $\mathbf{M}$-re való vetítés.

4. Mi $\mathbb{R}^2$-ben az $(1, 0)$ és $(0, 10)$ pontok generálta affin altér?

5. A V affin tér H részhalmazát **affin-függetlennek** nevezzük, ha bármely $x \in H$ nincs benne a $H \setminus \{x\}$ generálta affin altérben.

a) Lássuk be, hogy H pontosan akkor affin-független, ha bármely $x \in H$ esetén $\{y - x | y \in H \setminus \{x\}\}$ lineárisan független.

b) Igazoljuk, hogy egy N dimenziós affin térben legfeljebb $N + 1$ elemű affin-független halmaz létezhet.

6. Legyen A egy dimenziós irányított affin tér az $\mathbf{A}$ vektortér fölött. Ekkor rendezést vezethetünk be A-n így: $a < b$ pontosan akkor, ha $a - b < \mathbf{0}$. Elemezzük ennek a rendezésnek a tulajdonságait és definiáljuk A intervallumait.

43. Affin leképezések

43.1. Definíció *Legyen V és W affin tér a $\mathbf{V}$ illetve az $\mathbf{W}$ vektortér fölött. Az $A : V \to W$ leképezést **affinnak** nevezzük, ha létezik egy $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés úgy, hogy*

$$Ay - Ax = \boldsymbol{A}(y - x) \qquad (x, y \in V),$$

vagy másképp ugyanez:

$$A(x + \boldsymbol{x}) = Ax + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad (x \in V, \boldsymbol{x} \in \mathbf{V}).$$

*$\boldsymbol{A}$-t az A affin leképezés **alatti lineáris leképezésnek** hívjuk, és azt is mondjuk, hogy A affin leképezés az $\boldsymbol{A}$ lineáris leképezés fölött.*

*Ha V és W irányított, az A affin leképezés **irányítástartó**, ha $\boldsymbol{A}$ olyan.*

A $V \to W$ affin leképezések összességét $\mathrm{Aff}(V, W)$-val jelöljük.

Állítás *Egy affin leképezés alatti lineáris leképezés egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{A}'$ az A alatti lineáris leképezések. Ekkor a második definíciós formulából $Ax + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = Ax + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}$, azaz $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ esetén, tehát $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$.

43.2. Lássunk példát affin leképezésre!

(i) Ha y a V affin tér eleme, akkor $O_y : V \to \mathbf{V}$, $x \mapsto x - y$ affin leképezés $\mathrm{id}_{\mathbf{V}}$ fölött.

(ii) Ha $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, akkor $T_{\boldsymbol{x}} : V \to V$, $x \mapsto x + \boldsymbol{x}$ affin leképezés $\mathrm{id}_{\mathbf{V}}$ fölött.

(iii) Ha a $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ vektortereket affin tereknek tekintjük, egy $A : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ leképezés pontosan akkor affin, ha van olyan $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés és $\boldsymbol{a} \in \mathbf{W}$, hogy $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Valóban, az ilyen leképezés affin az $\boldsymbol{A}$ lineráis leképezés fölött; ha viszont A affin az $\boldsymbol{A}$ fölött, akkor az $\boldsymbol{a} := A\mathbf{0}$ definícióval A a fenti alakú.

A vektorterek közötti affin leképezések tehát a lineáris leképezések (ha $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$) és azok, amelyeket olykor "inhomogén lineáris" leképezéseknek hívnak (ha $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$).

A mondottak szerint tehát az

$$\mathbf{W} \times \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \equiv \mathrm{Aff}(\mathbf{V}, \mathbf{W}), \qquad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A}) \equiv (\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$$

azonosítást tehetjük.

Ezeket az affin leképezéseket igen jól kezelhető formában tudjuk előállítani a következőképpen.

A $\mathbf{V} \to \mathbb{K} \times \mathbf{V}$, $x \mapsto (1, x)$ injekció affin leképezés a $\mathbf{V} \to \mathbb{K} \times \mathbf{V}$, $\boldsymbol{x} \mapsto (0, \boldsymbol{x})$ lineáris leképezés fölött. Ezzel beágyazzuk $\mathbf{V}$-t a $\mathbb{K} \times \mathbf{V}$ affin alterének. Hasonlóképp járunk el $\mathbf{W}$-vel is. Így az $\boldsymbol{a} \in \mathbf{W}$ és $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ meghatározta affin leképezést az

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

blokkmátixszal megadott $\mathbb{K} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K} \times \mathbf{W}$ lineáris leképezésnek az $\{1\} \times \mathbf{V}$-re való leszűkítésével reprezentálhatjuk.

43.3. Állítás *Legyen $A : V \to W$ affin leképezés $\boldsymbol{A}$ fölött.*

(i) $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ pontosan akkor, ha A konstans leképezés;

(i) A pontosan akkor injektív vagy szürjektív, ha $\boldsymbol{A}$ olyan; ha A injektív, akkor A^{-1} affin leképezés $\boldsymbol{A}^{-1}$ fölött;

(iii) ha M a V-nek $\mathbf{M}$ vezette affin altere, akkor $A[M]$ az W-nak $\boldsymbol{A}[\mathbf{M}]$ vezette affin altere;

(iv) ha N az W-nak $\mathbf{N}$ vezette affin altere, akkor $\overset{-1}{A}(N)$ a V-nek $\overset{-1}{\boldsymbol{A}}(\mathbf{N})$ vezette affin altere;

(v) A megőrzi az affin kombinációt, azaz ha F véges indexhalmaz, $x_i \in V$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $\sum_{i \in F} = 1$, akkor

$$A \sum_{i \in F} \alpha_i x_i = \sum_{i \in F} \alpha_i A x_i.$$

Bizonyítás Az (i)-(iv) pontok bizonyítása igen egyszerű, rábízzuk az olvasóra.

(v) Az $x_0 := \sum_{i \in F} \alpha_i x_i$ konvex kombináció értelmezése $\sum_{i \in F} \alpha_i (x_i - x_0) = \mathbf{0}$ volt, tehát

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{A} \sum_{i \in F} \alpha_i (x_i - x_0) = \sum_{i \in F} \alpha_i \boldsymbol{A}(x_i - x_0) = \sum_{i \in F} \alpha_i (A x_i - A x_0),$$

azaz $A x_0 = \sum_{i \in F} \alpha_i A x_i$, amit bizonyítani akartunk. ■

Jegyezzük meg, hogy (iv) szerint bármely $u \in W$ esetén $\overset{-1}{A}\{u\}$ a V-nek $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$ vezette affin altere.

Láttuk az előző pontban, hogy egy $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezés is affin leképezés (önmaga fölött). Tehát minden $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}$ esetén $\overset{-1}{\boldsymbol{A}}\{\boldsymbol{u}\}$ a $\mathbf{V}$-nek affin altere (a $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$ eltoltja).

43.4. Ugyancsak egyszerűen láthatók be a következő tények.

(i) Ha $A : V \to W$ és $B : U \to V$ affin leképezés $\boldsymbol{A}$ illetve $\boldsymbol{B}$ fölött, akkor $A \circ B$ affin leképezés $\boldsymbol{AB}$ fölött.

(ii) Ha $A_i : V \to W_i$ affin leképezés $\boldsymbol{A}_i$ fölött ($i \in I$), akkor $(A_i)_{i\in I}$ affin leképezés $(\boldsymbol{A}_i)_{i\in I}$ fölött.

(iii) Ha $A_i : V_i \to W_i$ affin leképezés $\boldsymbol{A}_i$ fölött ($i \in I$), akkor $\mathop{\times}\limits_{i\in I} A_i$ affin leképezés $\mathop{\times}\limits_{i\in I} \boldsymbol{A}_i$ fölött.

43.5. Legyen V és W affin tér. Mivel a $\mathbf{W}$ vektorteret affin térnek is tekinthetjük, értelmes beszélni a $V \to \mathbf{W}$ affin leképezésekről is.

Állítás *Ha $A, B : V \to W$ affin leképezések $\boldsymbol{A}$ illetve $\boldsymbol{B}$ fölött, akkor*

$$A - B : V \to \mathbf{W}, \quad x \mapsto Ax - Bx \tag{$*$}$$

affin leképezés $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ fölött; továbbá $\mathrm{Aff}(V, \mathbf{W})$ a pontonkénti műveletekkel vektortér, és $\mathrm{Aff}(V, W)$ a fenti kivonással affin tér $\mathrm{Aff}(V, \mathbf{W})$ fölött.

Bizonyítás $(A-B)x-(A-B)y = (Ax-Bx)-(Ay-By) = (Ax-Ay)-(Bx-By) = \boldsymbol{A}(x-y)-\boldsymbol{B}(x-y) = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(x-y)$, tehát $A-B$ valóban affin leképezés $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ fölött.

Legyenek $F, G : V \to \mathbf{W}$ affin leképezések az $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezések fölött. Lévén F és G vektortér értékű leképezés, értelmes a pontonként értelmezett összegük. Erre $(F+G)x - (F+G)y = (Fx+Gx) - (Fy+Gy) = (Fx-Fy) + (Gx-Gy) = \boldsymbol{F}(x-y) + \boldsymbol{G}(x-y) = (\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})(x-y)$, így $F+G$ affin leképezés $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$ fölött. Hasonlóan láthatjuk be, hogy $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén αF affin leképezés $\alpha\boldsymbol{F}$ fölött. Tehát $\mathrm{Aff}(V, \mathbf{W})$ vektortér.

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy a $(*)$ kivonás teljesíti a 41.1. definíció (I) és (II) követelményét.

Legyen $B \in \mathrm{Aff}(V, W)$. Tegyük fel, hogy valamely $A, A' \in \mathrm{Aff}(V, W)$ esetén $A - B = A' - B$. Ekkor a V minden x elemére $Ax - Bx = A'x - Bx$, amiből azonnal adódik, hogy $A = A'$, vagyis az $A \mapsto A - B$ leképezés injektív. Ha viszont $F \in \mathrm{Aff}(V, \mathbf{W})$, akkor $V \to W$, $x \mapsto Ax := Bx + Fx$ affin leképezés, amint ezt könnyű látni, és $F = A - B$, vagyis az $A \mapsto A - B$ leképezés szürjekció.

Legyen $A, B, C \in \mathrm{Aff}(V, W)$. Ekkor minden $x \in V$ esetén

$$\big((A-B)+(B-C)+(C-A)\big)x = (A-B)x + (B-C)x + (C-A)x = \\ (Ax-Bx) + (Bx-Cx) + (Cx-Ax) = \mathbf{0},$$

tehát $(A-B)+(B-C)+(C-A) = \mathbf{0}$.

43.6. Egy N dimenziós V affin teret $K : V \to \mathbb{K}^N$ affin bijekcióval koordinátázunk; $P := K^{-1}$ az affin tér paraméterezése. Egy ilyen koordinátázás meghatározza a V egy $o := P\mathbf{0}$ pontját, és a $\mathbf{V}$-nek egy $(\boldsymbol{Pe}_1, \ldots, \boldsymbol{Pe}_N)$ indexezett bázisát, ahol természetesen $\mathbf{0}$ a $\mathbb{K}^N$ nulla-vektora és $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_N)$ a standard bázisa.

Fordítva, ha adott a V egy o eleme és a $\mathbf{V}$ egy $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ indexezett bázisa, amelynek a duálisa $(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ akkor a $V \to \mathbb{K}^N$, $x \mapsto \big((\boldsymbol{p}_i|x-o) \mid i = 1, \ldots, N\big)$ leképezés affin koordinátázás.

43.7. Feladatok

1. Mely leképezés affin az alábbiak közül:
(i) $\mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto \xi_1 + 1$,
(ii) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (\xi_1 + 1, \xi_2 + 2, \xi_3 + 3)$,
(iii) $\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1\} \to \mathbb{R}$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto \xi_1 + \xi_2$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $A : V \to V$ affin leképezés $\mathrm{id}_{\mathbf{V}}$ fölött, akkor van olyan $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$, hogy $A = T_{\boldsymbol{x}}$.

3. Mutassuk meg, hogy $O_y \circ O_z^{-1} = T_{z-y}$ $(y, z \in V)$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B : V \to W$ ugyanazon lineáris leképezés fölötti affin leképezés, akkor $A - B$ konstans.

5. Igazoljuk, hogy az $\mathrm{Aff}(V, \mathbf{W})$ vektortér – következésképpen az $\mathrm{Aff}(V, W)$ affin tér – dimenziója $\dim\mathbf{W} + (\dim\mathbf{V})(\dim\mathbf{W})$. (Útmutatás: elég ezt belátni az $\mathrm{Aff}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ vektortérre; használjuk a 43.2 (iii)-ben mondottakat).

6. Legyen $A : V \to V$ affin leképezés $\boldsymbol{A}$ fölött, $o \in V$. Ekkor $O_o \circ A \circ O_o^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ affin leképezés. Mutassuk meg hogy ennek a 43.2.(iii)-ben megadott mátrixalakja

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ Ao - o & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}.$$

7. Adjuk meg a 43.2.(iii)-beli mátrixalak segítségével az $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}) \in \mathbf{V} \times \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ által meghatározott $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ affin leképezések kompozícióját.