

Matematika A3 villamosmérnököknek, 1. hét

Divergencia, gradiens, rotáció

I. Igazoljuk a rotációra vonatkozó alábbi összefüggéseket! (Itt r az $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény, $a \in \mathbb{R}^3$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ és $g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.)

1. $\text{rot}(a \times r) = 2a$
2. $\text{rot}(r^2 \cdot r) = 0$
3. $\text{rot}((ar) \cdot r) = a \times r$
4. $\text{rot}(r^2 \cdot a) = 2r \times a$
5. $\text{rot}(a \|r\|) = \frac{r \times a}{\|r\|}$
6. $\text{rot}(fg) = f \text{rot } g + (\text{grad } f) \times g$

II. Igazoljuk a kétszer folytonosan differenciálható függvényekre vonatkozó alábbi azonosságokat.

1. $\text{div grad} = \Delta$
2. $\text{rot grad} = 0$
3. $\text{div rot} = 0$
4. $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$

Potenciális terek

I. Tegyük fel, hogy a

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y, z) \mapsto x^3 + xy^2 + z$$

potenciálfüggvény ír le valamilyen fizikai kölcsönhatást. Milyen hely-erő $r \mapsto v(r)$ vektormező származtatható a potenciálból?

II. Az alábbi $v(r)$ vektormezők származtathatók-e egy potenciális térből az adott V tartományban, és ha igen, határozzuk meg a potenciált.

1. $v(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y, z > 0\}$
2. $v(r) = \frac{r}{\|r\|^2}$ $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
3. $v(x, y) = (y, x)$ $V = \mathbb{R}^2$
4. $v(x, y) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{-1}{x}\right)$ $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$