Matematika A3 villamosmérnököknek, 3. hét

Gauss–Osztrogradszkij-tétel és Stokes-tétel

I. Az ismert integráltételek segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

1. Legyen F a $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \geq 0$ része, és az n normális vektorára teljesüljön az $\langle n \rangle (0, 0, 1) \geq 0$ egyenlet. Továbbá legyen
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (xz^2, zy^2, yx^2)$$
Határozzuk meg az $\displaystyle\iint_F \operatorname{rot} v \, \mathrm{d}F$ integrál értékét.
2. Számoljuk ki a
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$$
vektormező fluxusát a $9z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$ egyenletek által meghatározott kúpfelületen, ha a felület normálisát kifele irányítjuk.
3. Legyen
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (x, y, -2z),$$
és legyen F az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloid $0 \leq y \leq 4$ része $\langle n \rangle (0, 1, 0)\rangle \geq 0$ irányítással, ahol n a felület normálvektora. Határozzuk meg az $\displaystyle\iint_F v \, \mathrm{d}F$ integrál értékét.
4. Legyen $v(x, y, z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, 0\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z \geq 0$ része. Határozzuk meg az $\displaystyle\iint_F v \, \mathrm{d}F$ integrál értékét.
5. Legyen $v(x, y, z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, z\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z > 0$ része. Határozzuk meg az $\displaystyle\iint_F v \, \mathrm{d}F$ integrál értékét.