

## Matematika A3 villamosmérnököknek, 5. hét

### Komplex differenciálhatóság és a Cauchy–Riemann egyenletek

I. Igazoljuk, hogy  $\sin' = \cos$ ,  $\cos' = -\sin$ ,  $\exp' = \exp$ ,  $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$  és  $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$  teljesül.

II. Legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \operatorname{sh}(3i\bar{z})$ . Hol differenciálható és hol reguláris az  $f$  függvény? Mibe viszi át az  $f$  függvény a  $\operatorname{Re} z = \frac{\pi}{6}$  egyenest?

III. Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{z+1}{z+i}$$

leképezésnél a nyújtási együtthatót, illetve a forgatási szöveget a  $z_0 = 1$  pontban!

IV. Cauchy–Riemann-egyenletek alkalmazása.

1. Hol differenciálható és hol reguláris az  $f(x+iy) = (x^3 + 2xy) + i(3x^2y + 6y)$  függvény?
2. Határozzuk meg a  $c$  paraméter értékét úgy, hogy a  $v(x, y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$  függvény az egész komplex számsíkon értelmezett reguláris függvény valós része legyen.
3. Határozzuk meg a  $c$  paraméter értékét úgy, hogy az  $u(x, y) = cx^3 + 36xy^2 + xy$  függvény az egész komplex számsíkon értelmezett reguláris függvény képzetes része legyen!
4. Milyen  $c$  érték mellett létezik a  $v(x, y) = -x^3 + cxy^2 - y$  függvénynek harmonikus párja? Keressük meg, azt az  $u(x, y)$  harmonikus párt, melyre  $u(0, 0) = 0$  teljesül!

V. Legyen  $u(x, y) = x^3 + cxy^2 - 2xy$ .

1. Határozzuk meg a  $c$  paraméter értékét úgy, hogy az  $u$  egy reguláris  $f$  függvény valós része legyen!
2. Írjuk fel ezen  $f$  függvények közül azt, amelynél az  $f(-1+i)$  függvényérték valós!
3. Határozzuk meg  $f'(-1+i)$  értékét!

VI. Legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mindenhol értelmezett holomorf függvény. Mutassuk meg, hogy a  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  függvény is holomorf.