Matematika A3 villamosmérnököknek, 7. hét

Cauchy integrálformulái

I. Számoljuk ki az alábbi $\displaystyle\int_\gamma f$ alakú integrálokat, ha

1. $f(z) = \mathrm{e}^{2\bar{z}}$ és γ az origóból a $-1 + \mathrm{i}$ pontba menő szakasz;
2. $f(z) = \bar{z}$ és γ az origó körüli egységsugarú kör pozitív irányítással;
3. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ és γ az origó körüli egységsugarú kör pozitív irányítással;
4. $f(z) = z^n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és γ az origó körüli $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú kör pozitív irányítással.

II. Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és tekintsük a

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto a + r\,\mathrm{e}^{n2\pi\,\mathrm{i}\,t}$$

görbét. Határozzuk meg a γ görbe indexfüggvényét, azaz adjuk meg minden $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran}\gamma$ esetén $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{x-z}\,\mathrm{d}\,x$ értékét.

III. Minden $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex számra és $R \in \mathbb{R}^+$ paraméterre legyen

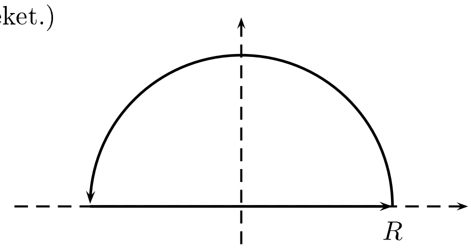
$$\gamma_{z_0,R} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto z_0 + R\,\mathrm{e}^{2\pi t\,\mathrm{i}}\,.$$

A Cauchy-féle integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi körintegrálokat!

1. $\displaystyle\oint_{\gamma_{-\mathrm{i},1}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z^2}}{z^2+9}\,\mathrm{d}\,z$ 2. $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z} + z\cos\left(z^2\right)\,\mathrm{d}\,z$ 3. $\displaystyle\oint_{\gamma_{2\,\mathrm{i},3}} \frac{\sin(\mathrm{i}\,z)}{(z-1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}\,z$

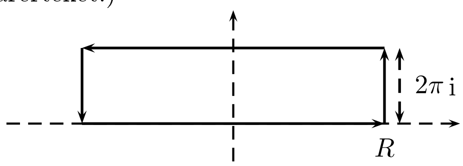
IV. Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ számra $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi\,\mathrm{e}^{-a}}{2a}$ teljesül.

(Útmutatás: Adott $R \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén írjuk fel az ábrán látható görbementi integrált, majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)



V. Legyen $p \in]0,1[$, bizonyítsuk be az $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ egyenlőséget.

(Útmutatás: Legyen $R \in]p,\infty[$ és integráljuk az $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{pz}}{1+\mathrm{e}^{z}}$ függvényt az ábrán látható görbén, majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)



VI. Igazolja az alábbi $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvények 0 pontbeli reziduumára vonatkozó összefüggéseket.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z+z^2}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = 1.$
2. $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = \dfrac{-1}{2}.$
3. $f(z) = \dfrac{z-\sin z}{z^4}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = \dfrac{1}{6}.$
4. $f(z) = \dfrac{\mathrm{sh}\, z}{z^4(1-z^2)}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = \dfrac{7}{6}.$
5. $f(z) = \dfrac{\mathrm{ctg}\, z}{z^4}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = \dfrac{-1}{45}.$
6. $f(z) = \dfrac{\mathrm{ch}\, z}{\ln(1+z)}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = 1.$
7. $f(z) = \mathrm{cth}\, z$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = 1.$
8. $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^4+z^5}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = -1.$

VII. Határozzuk meg az $f(z)$ függvények z_0 pont körüli Laurent-sorfejtését minden lehetséges tartományon.

1. $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \dfrac{1}{z+1} \quad z_0 = \mathrm{i}$
2. $f : \mathbb{C} \setminus \{-1,\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \dfrac{1}{(z+1)(z-\mathrm{i})} \quad z_0 = \mathrm{i}$
3. $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \mathrm{e}^z + \dfrac{1}{z} \quad z_0 = 2$

VIII. Tekintsük az $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z+1)^3}$ függvényt.

1. Írjuk fel a függvény $z_0 = -1$ pont körüli Laurent-sorát.
2. Vizsgáljuk meg a szingularitás jellegét és adjuk meg a függvény reziduumát a szinguláris pontban.
3. Számoljuk ki a $\displaystyle\oint_{\gamma_{-2,2}} f$ és a $\displaystyle\oint_{\gamma_{-5,1}} f$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c \in \mathbb{C}$ középpontú $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.