

Matematika A3 villamosmérnököknek, 11. hét

Szétválasztható differenciálegyenletek

I. Keressük meg azokat az $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket melyek megoldásai a következő szétválasztható, illetve szétválaszthatóra visszavezethető differenciálegyenleteknek, illetve a megadott kezdeti érték problémának.

1. $y'(x) = \frac{x^2}{e^{3x}}, \quad y(1) = 0$
2. $y'(x) = \frac{1 + y(x)^2}{x}, \quad y(e) = 1$
3. $y'(x) = \frac{x - y(x)}{x + y(x)}, \quad y(0) = 1$
4. $y'(x) = ky(x)(1 - y(x)), \quad y(0) \in \{0, 1\}, \quad k \in \mathbb{R}^+$

Elsőrendű differenciálegyenletek

I. Oldjuk meg az alábbi lineáris elsőrendű differenciálegyenleteket.

1. $y'(x) + y(x) = x + e^{-2x} \quad y(0) = -2$
2. $y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{\cos x}{x^2} \quad y(\pi) = 0$
3. $xy'(x) + 2y(x) = \sin x \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}$

II* Gonosz Manó: Tegyük fel, hogy egy l hosszúságú rugalmas gumiszál egyik vége a falhoz van rögzítve, a másik végén pedig egy hangya sétál a gumiszálon a fal felé a gumiszálhoz képest v sebességgel. Ám egy gonosz manó elkezdte a gumiszál szabad végét húzni w sebességgel a fallal ellentétes irányba. Mely sebességparaméterek esetén tudja a hangya még elérni a falat? A $l = 1\text{m}$, $v = 0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $w = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ paraméterek mellett, mennyi idő éri el a hangya a falat, ha egyáltalán eléri valamikor?

III. A közegellenállási erő néhol a sebességgel és néhol a sebesség négyzetével arányos. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora utat tesz meg a v kezdeti sebességgel rendelkező test, ha csak a közegellenállási erő hat rá egyenesen arányosan, illetve négyzetesen a sebességgel.

Egzakt differenciálegyenletek

I. Vizsgáljuk meg, hogy egzaktak-e az alábbi differenciálegyenletek. Ha nem, akkor a megfelelő multiplikatórral tegyük őket egzakttá. Ezután adjuk meg az egzakt differenciálegyenleteket megoldását implicit alakban, és ha lehet, a kezdeti érték probléma megoldását adjuk meg explicit alakban is.

1. $2x^3 - xy(x)^2 + (2y(x)^3 - x^2y(x))y'(x) = 0 \quad y(0) = 1$
2. $xy(x)^2 + (1 + x^2y(x))y'(x) = 0 \quad y(0) = 1$
3. $y'(x) = \frac{\sin y(x) + y(x) \sin x}{\cos x - x \cos y(x)} \quad y(0) = 1$
4. $x e^{y(x)} + (x^2 e^{y(x)} + 2y(x) e^{-y(x)})y'(x) = 0 \quad y(0) = 1$
5. $y(x) + \frac{1}{1 + x^2} + \left(2x + \frac{\arctg x}{y(x)}\right)y'(x) = 0 \quad y(1) = \frac{\pi}{8}$