Analízis 1, 1. hét

Nyílt/zárt halmazok rendszere és ekvivalens metrikák

I$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen (M,d) metrikus tér és legyen $A, B \subseteq M$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ és $\operatorname{Int}(A \cap B) = (\operatorname{Int} A) \cap (\operatorname{Int} B)$ teljesül.

II$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M,d) metrikus tér és legyen $(E_i)_{i \in I}$ az M részhalmazainak tetszőleges rendszere. Bizonyítsuk be a következőket.

1. $\operatorname{Int}\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} \operatorname{Int} E_i$
2. $\operatorname{Int}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) \supseteq \bigcup_{i \in I} \operatorname{Int} E_i$
3. $\overline{\bigcap_{i \in I} E_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{E_i}$
4. $\overline{\bigcup_{i \in I} E_i} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{E_i}$

Továbbá adjunk példákat olyan metrikus terekre és halmazrendszerekre, ahol a fenti tartalmazások szigorúak, azaz valódi részhalmazt jelölnek.

III$^{\mathrm{A}}$. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény. Igazoljuk, hogy ekkor

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x,y) \mapsto |f(x) - f(y)|$$

metrika.

IV$^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük a valós számok halmazán a

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x,y) \mapsto |2^x - 2^y|$$

metrikát. Adjuk meg a $B_1(0)$ és a $B_2(1)$ halmaz elemeit.

V$^{\mathrm{A}}$. Tekintsük az M halmazon a d diszkrét metrikát, azaz

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \neq y; \\ 0, & \text{ha} \quad x = y. \end{cases}$$

1. Mutassuk meg, hogy az M minden részhalmaza nyílt és zárt halmaz.
2. Adjuk meg az M tér kompakt részhalmazait.

VI$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M,d) metrikus tér és definiáljuk a

$$d' : M \times M \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x,y) \mapsto \min(d(x,y), 1)$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy (M,d') metrikus tér, valamint, hogy a d és d' metrikák ekvivalensek.

VII$^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy minden véges halmazon bármely két metrika ekvivalens egymással.

VIII$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M,d) metrikus tér. Igazoljuk, hogy az alábbi $d_1, d_2 : M \times M \to \mathbb{R}^+$ függvények is metrikát határoznak meg.

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \qquad d_2(x,y) = \log(d(x,y) + 1)$$

IX$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M, d) metrikus tér és legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ olyan függvény, melyre

1. $f(0) = 0$ és minden $x > 0$ esetén $f(x) > 0$;
2. f monoton növő;
3. minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Mutassuk meg, hogy ekkor $(M, f \circ d)$ is metrikus tér.

X$^{\mathrm{A}}$. Legyen M a sakktábla mezőinek halmaza. Az $x, y \in M$ mezők közötti $d(x, y)$ távolság legyen az a legkisebb n természetes szám, melyre igaz, hogy az x mezőről indulva n lépésben el tudunk jutni az y mezőre lólépésben.

1. Adjuk meg a $d(A1, B1)$, $d(A1, B2)$ és $d(D4, E5)$ távolságokat.
2. Mik lesznek a $B_2(C3)$ és a $B_3(H8)$ halmaz elemei?

XI$^{\mathrm{A}}$. Legyen X nem üres halmaz és jelölje $\mathcal{M}(X)$ az X halmazon értemezett metrikák halmazát. Mutassuk meg, hogy

$$D : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) \to \mathbb{R} \qquad (d, d') \mapsto \min\left\{1, \sup_{x,y \in X} |d(x, y) - d'(x, y)|\right\}$$

metrika a metrikák halmazán.