Analízis 1, 2. hét

Teljes és kompakt halmazok

I$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M,d) metrikus tér, $x\in M$ és $r\in\mathbb{R}^+$.

1. Mutassuk meg, hogy $\overline{B}_r(x)\subseteq\{y\in M|\ d(x,y)\le r\}$ teljesül.
2. Adjunk példát olyan (M,d) metrikus térre, $x\in M$ pontra és $r\in\mathbb{R}^+$ sugárra, melyre

$$B_r(x)\subsetneqq\overline{B}_r(x)\subsetneqq\{y\in M|\ d(x,y)\le r\}.$$

II$^{\mathrm{A}}$. Legyen $d_1,d_2:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $d_1(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$ és $d_2(x,y)=|\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y|$. Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R},d_1)$ és $(\mathbb{R},d_2)$ nem teljes metrikus terek.

III$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen (M,d) diszkrét metrikus tér. Mutassuk meg, hogy egy $a:\mathbb{N}\to M$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik olyan $x\in M$, melyre a $\{n\in\mathbb{N}|\ a_n\ne x\}$ halmaz véges.

IV$^{\mathrm{Gy}}$. Teljes-e minden diszkrét metrikus tér?

V$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $M_1=\left\{\frac{1}{n}|\ n\in\mathbb{N}^+\right\}$ és $M_2=M_1\cup\{0\}$, valamint d az euklideszi metrika ($d(x,y)=|x-y|$). Teljes-e az (M_1,d) és az (M_2,d) tér?

VI$^{\mathrm{A}}$. Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ és tekintsük a következő függvényeket.

$$d_1:C([a,b],\mathbb{R})\times C([a,b],\mathbb{R})\to\mathbb{R}\qquad (f,g)\mapsto\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|$$

$$d_2:C([a,b],\mathbb{R})\times C([a,b],\mathbb{R})\to\mathbb{R}\qquad (f,g)\mapsto\int_a^b|f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}\,t$$

1. Igazoljuk, hogy $(C([a,b],\mathbb{R}),d_1)$ és $(C([a,b],\mathbb{R}),d_2)$ metrikus tér.
2. Teljes-e a $(C([a,b],\mathbb{R}),d_1)$ és a $(C([a,b],\mathbb{R}),d_2)$ tér?

VII$^{\mathrm{Gy}}$. Adjunk példát olyan (M,d) metrikus térre és $A\subseteq M$ halmazra, mely korlátos, zárt, de nem kompakt.

VIII$^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy metrikus térben véges sok kompakt halmaz metszete kompakt.

IX$^{\mathrm{Gy}}$. Legyenek d_1 és d_2 ekvivalens metrikák az M halmazon. Mutassuk meg, hogy egy $A\subseteq M$ halmaz pontosan akkor kompakt az (M,d_1) metrikus térben, ha kompakt az (M,d_2) térben.

X$^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy minden metrikus tér minden kompakt részhalmaza teljes.

XI$^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy minden (M,d) metrikus tér esetén az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Az M halmaz kompakt.
2. Minden $(Z_i)_{i\in I}$ halmazrendszerre, ha minden $i\in I$ esetén $Z_i\subseteq M$ zárt halmaz és bármely $i,j\in I$ indexhez létezik olyan $k\in I$ index, melyre $Z_k\subseteq Z_i\cap Z_j$ teljesül és $\bigcap_{i\in I}Z_i=\emptyset$, akkor van olyan $k\in I$ index, melyre $Z_k=\emptyset$.
3. Minden $(U_i)_{i\in I}$ halmazrendszerre, ha minden $i\in I$ esetén $U_i\subseteq M$ nyílt halmaz és bármely $i,j\in I$ indexhez létezik olyan $k\in I$ index, melyre $U_i\cup U_j\subseteq U_k$ teljesül és $\bigcup_{i\in I}U_i=M$, akkor van olyan $k\in I$ index, melyre $U_k=M$.

XII$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M,d) metrikus tér, $A\subseteq M$, $d'=d|_{A\times A}$ és $K\subseteq A$. Mutassuk meg, hogy ha a K halmaz pontosan akkor kompakt az (A,d') térben, amikor kompakt az (M,d) térben.