Analízis 1, 4. hét

Normált terek alapjai

I^{Gy}. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Igazoljuk, hogy $B_r(x)$ konvex halmaz.

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq V$ konvex halmaz. Mutassuk meg, hogy ekkor $\operatorname{Int} X$ és $\overline{X}$ is konvex halmaz.

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. A $V = C([0,1], \mathbb{R})$ tér minden $f \in V$ vektorára legyen $\|f\|_1 = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$ és $\|f\|_2 = \int\limits_0^1 |f|$.

1. Igazoljuk, hogy $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ norma.
2. Igazoljuk, hogy $(V, \|\cdot\|_1)$ Banach-tér.
3. Igazoljuk, hogy $(V, \|\cdot\|_2)$ nem Banach-tér.
4. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{\|\cdot\|_1}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|_2}(0)$ teljesül.
5. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{\|\cdot\|_2}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|_1}(0)$ teljesül.
6. Igazoljuk, hogy ha az $X \subseteq V$ halmaz nyílt a $\|\cdot\|_2$ norma szerint, akkor nyílt a $\|\cdot\|_1$ norma szerint is.
7. Igazoljuk, hogy $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ nem ekvivalens normák.
8. Tekintsük a $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(0)$ leképezést. A $\|\cdot\|_1$ vaga a $\|\cdot\|_2$ norma szerint lesz φ folytonos?
9. Legyen $X \subseteq V$. Legyen X_i az X halmaz $\|\cdot\|_i$ norma szerinti lezártja az $i = 1, 2$ esetben. Ekkor teljesül-e az $X_1 \subseteq X_2$ vagy az $X_2 \subseteq X_1$ tartalmazások valamelyike?
10. Tekintsük az $M = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ lineáris alteret. Mutassuk meg, hogy M zárt a $\|\cdot\|_1$ norma szerint, de nem zárt a $\|\cdot\|_2$ norma szerint.

$\mathrm{IV}^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, valamint

$$C^1([a,b], \mathbb{R}) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \exists \tilde{f} : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R} : \tilde{f}|_{[a,b]} = f, [a,b] \subseteq \operatorname{Int} \operatorname{Dom} \tilde{f}, \tilde{f}'|_{[a,b]} \in C([a,b], \mathbb{R}) \right\}$$

Norma-e a $C^1([a,b], \mathbb{R})$ vektortéren a

1. $\|f\|_1 = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| + \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$;
2. $\|f\|_2 = |f(a)| + \int_a^b |f|$;

leképezések valamelyike?

V^{Gy}. Legyen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az lineáris leképezés, melynek mátrixa a kanonikus $(e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ bázisban $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg $\|A\|$ értékét ha $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_i) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_j)$, ahol $i, j \in \{1, 2, \infty\}$.

VI^{A}. Definiáljuk a sorozatok vektorterének a $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid |\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\}| < \infty\}$ alterét és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{C} \qquad a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

lineáris leképezést. Folytonos-e φ, ha a $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ teret a $\|\cdot\|_i$ normával látjuk el, ahol $i \in \{1, 2, \infty\}$.