# Analízis 1, 6. hét

## Riesz-féle reprezentációs tétel és mátrixfüggvények

I$^{\mathrm{Gy}}$ . Legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés és az $\mathbb{R}^n$ teret lássuk el a megszokott skaláris szorzással. Mely $z \in \mathbb{R}^n$ vektorra fog teljesülni minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén a $\varphi(x) = \langle z, x \rangle$ egyenlőség?

II$^{\mathrm{A}}$ . Jelölje $M_n(\mathbb{K})$ azon $n \times n$-es mátrixok halmazát, melynek elemei a $\mathbb{K}$ számtestből vannak. Mutassuk meg, hogy minden $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ lineáris leképezéshez létezik pontosan egy olyan $D \in M_n(\mathbb{K})$ mátrix, hogy minden $X \in M_n(\mathbb{K})$ esetén $\varphi(X) = \mathrm{Tr}(DX)$ teljesül.

III$^{\mathrm{Gy}}$ . Számítsuk ki az $\mathrm{e}^{tA}$ mátrixot, ha $t \in \mathbb{R}$ és az $A$ mátrix a következő alakú.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

IV$^{\mathrm{A}}$ . Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ mátrixot.

1. Határozzuk meg a mátrix $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$, sajátértékeit és $(v_i)_{i=1,2,3}$ sajátvektorait.
2. Írjuk fel az $A$ mátrixot $S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} S$ alakban.
3. Minden $v_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sajátvektorhoz határozzuk meg azt a $P_i$ projekciót, mely az origón átmenő $v_i$ irányvektorú egyenesre vetít merőlegesen.
4. Mutassuk meg, hogy $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ teljesül.
5. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6 \cos \left( \frac{\pi x}{4} \right)$, akkor $f(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & - & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

V$^{\mathrm{Gy}}$ . Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Írjuk fel a mátrixokat $S^{-1}DS$ alakban, ahol $D$ diagonális mátrix.
3. Számoljuk ki az $f(A)$ és az $f(B)$ mátrixot, ahol $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sin \left( \frac{\pi x}{2} \right)$.

VI$^{\mathrm{A}}$ . Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixot, valamint az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \cos \left( \frac{\pi x}{2} \right)$ függvényt.

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Írjuk fel a mátrixokat $S^{-1}JS$ alakban, ahol $J$ Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix.
3. Igazoljuk, hogy $f(A) = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ és $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

VII$^{\mathrm{Gy}}$ . Tekintsük az $A = \frac{\mathrm{i}}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixot.

1. Mutassuk meg, hogy az $A$ mátrix normális, de nem önadjungált.
2. Írjuk fel a mátrix spektrálfelbontását.
3. Számoljuk az $A^{102}$ mátrixot.