Analízis 1, 7. hét

Approximálhatóság speciális függvényekkel

I$^{\mathrm{A}}$. Legyen $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

1. $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n \,\mathrm{d}\,x = 0$ teljesül, akkor $f = 0$;
2. $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^{\pi n} \,\mathrm{d}\,x = 0$ teljesül, akkor $f = 0$;
3. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{e}^{nx} \,\mathrm{d}\,x = 0$ teljesül, akkor $f = 0$.

II$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_0^1 f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x = 0,$$

akkor $f = 0$.

III$^{\mathrm{A}}$. Legyen $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

1. Mutassuk meg, hogy minden $f \in C([a,b]\times[c,d],\mathbb{R})$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ paraméterhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, valamint $\alpha_i \in C([a,b],\mathbb{R})$ és $\beta_i \in C([c,d],\mathbb{R})$ $i \in \{1,\ldots,n\}$ függvényrendszer, hogy
$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k \right\|_{\sup} = \sup_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)\beta_k(y) \right| < \varepsilon.$$
2. Mutassuk meg, hogy minden $f \in C([a,b]\times[c,d],\mathbb{R})$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ paraméterhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, valamint $\alpha_i, \beta_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $i \in \{1,\ldots,n\}$ polinomrendszer, hogy
$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k \right\|_{\sup} = \sup_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)\beta_k(y) \right| < \varepsilon.$$

IV$^{\mathrm{H}}$. Legyen (M,d) és (M',d') kompakt metrikus tér. Mutassuk meg, hogy minden $f \in C(M \times M',\mathbb{R})$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ paraméterhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, valamint minden $k = 1,\ldots,n$ esetén léteznek olyan $\alpha_i \in C(M,\mathbb{R})$ és $\beta_i \in C(M',\mathbb{R})$ függvények, melyekre

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k \right\|_{\sup} = \sup_{(x,y)\in T\times T'} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)\beta_k(y) \right| < \varepsilon$$

teljesül.

V$^{\mathrm{A}}$. Legyen $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, W a $C([a,b],\mathbb{R})$ tér konvex függvényeinek a részhalmaza, azaz $W = \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) \mid f \text{ konvex}\}$, valamint legyen $A = W - W$.

1. Mutassuk meg, hogy A lineáris altér.
2. Mutassuk meg, hogy minden $f,g \in W$ függvényre $\sup(f,g) \in W$ teljesül, ahol
$$\sup(f,g) : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sup(f(x),g(x)).$$
3. Legyen $f_1,f_2,g_1,g_2 \in W$. Mutassuk meg, hogy
$$\sup(f_1 - g_1, f_2 - g_2) = \sup(f_1 + g_2, f_2 + g_1) - (g_1 + g_2)$$
teljesül; vagyis minden $h_1,h_2 \in A$ esetén $\sup(h_1,h_2) \in A$.
4. Mutassuk meg, hogy minden $f \in A$ függvény esetén $|f| \in A$ teljesül.
5. Mutassuk meg, hogy A sűrű a $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.