Analízis 1, 8. hét

Komplex differenciálhatóság és a Cauchy–Riemann egyenletek

I$^{\mathrm{Gy}}$. Számoljuk ki az $\exp(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2})$, $\sin(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2})$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\pi\right)$, $\ln(-4\,\mathrm{i})$ és $\mathrm{ch}(6\,\mathrm{i})$ kifejezés valós illetve képzetes részét!

II$^{\mathrm{Gy}}$. A komplex számok körében oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\bar{z}} + 5 = 0 \quad \sin(2z) + 3\,\mathrm{i} = 0 \quad \mathrm{ch}\, z = 0 \quad \mathrm{sh}(3\,\mathrm{i}\,\bar{z}) = 0 \quad \sin z = \mathrm{i} \cos z$$

III$^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk, hogy $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\exp' = \exp$, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ és $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ teljesül.

IV$^{\mathrm{A}}$. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \mathrm{sh}(3\,\mathrm{i}\,\bar{z})$. Hol differenciálható és hol reguláris az f függvény? Mibe viszi át az f függvény a $\mathrm{Re}\, z = \frac{\pi}{6}$ egyenest?

V$^{\mathrm{A}}$. Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{z+1}{z+\mathrm{i}}$$

leképezésnél a nyújtási együtthatót, illetve a forgatási szöget a $z_0 = 1$ pontban!

VI$^{\mathrm{A}}$. Cauchy–Riemann-egyenletek alkalmazása.

1. Hol differenciálható és hol reguláris az $f(x + \mathrm{i}\, y) = (x^3 + 2xy) + i(3x^2y + 6y)$ függvény?
2. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy a $v(x, y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$ függvény az egész komplex számsíkon értelmezett reguláris függvény valós része legyen.
3. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $u(x, y) = cx^3 + 36xy^2 + xy$ függvény az egész komplex számsíkon értelmezett reguláris függvény képzetes része legyen!
4. Milyen c érték mellett létezik a $v(x, y) = -x^3 + cxy^2 - y$ függvénynek harmonikus párja? Keressük meg, azt az $u(x, y)$ harmonikus párt, melyre $u(0, 0) = 0$ teljesül!

VII$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $u(x, y) = x^3 + cxy^2 - 2xy$.

1. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az u egy reguláris f függvény valós része legyen!
2. Írjuk fel ezen f függvények közül azt, amelynél az $f(-1 + \mathrm{i})$ függvényérték valós!
3. Határozzuk meg $f'(-1 + \mathrm{i})$ értékét!

VIII$^{\mathrm{A}}$. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Mutassuk meg, hogy a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ függvény is holomorf.