Analízis 1, 9. hét

Komplex függvény vonalmenti integrálja és Cauchy integrálformulái

I^{A} . Számoljuk ki az alábbi $\displaystyle\int_\gamma f$ alakú integrálokat, ha

1. $f(z) = \mathrm{e}^{2\bar{z}}$ és γ az origóból a $-1 + \mathrm{i}$ pontba menő szakasz;
2. $f(z) = \bar{z}$ és γ az origó körüli egységsugarú kör pozitív irányítással;
3. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ és γ az origó körüli egységsugarú kör pozitív irányítással;
4. $f(z) = z^n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és γ az origó körüli $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú kör pozitív irányítással.

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és tekintsük a

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto a + r\,\mathrm{e}^{n2\pi\,\mathrm{i}\,t}$$

görbét. Határozzuk meg a γ görbe indexfüggvényét, azaz adjuk meg az

$$\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ran}\,\gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{x - z}\,\mathrm{d}\,x$$

függvényt.

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. Cauchy integrálformulái alapján számoljuk ki az adott $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és γ pozitív irányítású zárt görbe mellett a $\displaystyle\int_\gamma f$ vonalmenti integrált.

1. $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$, γ: az origó körüli 2 egység sugarú kör;
2. $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{2z}}{z-1}$, γ: az 1 körüli π egység sugarú kör;
3. $f(z) = \dfrac{\cos(\pi z) - 1}{z^2 + 2z - 3}$, γ: az origó körüli r egység sugarú kör, ahol $r \in \left\{\dfrac{1}{2}, 2, 4, 8\right\}$;
4. $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^2}$, γ: az origó körüli 1 egység sugarú kör;
5. $f(z) = \dfrac{z^5 + 11z^2 + 3}{(z^2+4)^2}$, γ: az $1 + \mathrm{i}$ körüli 2 egység sugarú kör;
6. $f(z) = \dfrac{z^6}{(z-1)^2(z+2)^2}$, γ: az origó körüli 10 egység sugarú kör;
7. $f(z) = \dfrac{\cos(3z)}{z^3}$, γ: az origó körüli 1 egység sugarú kör;
8. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^3}$, γ: az i körüli 2 egység sugarú kör.