

Analízis 1, 10. hét

Valós integrálok meghatározása Cauchy integrálformulával

I^A . Minden $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex számra és $R \in \mathbb{R}^+$ paraméterre legyen

$$\gamma_{z_0,R} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto z_0 + R e^{2\pi t i}.$$

A Cauchy-féle integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi körintegrálokat!

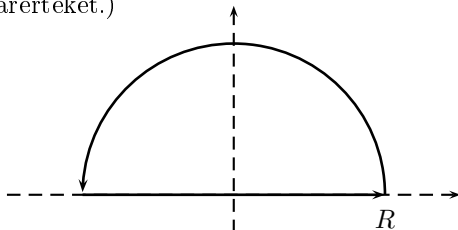
$$1. \quad \oint_{\gamma_{-i,1}} \frac{e^{iz^2}}{z^2 + 9} dz \quad 2. \quad \oint_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z} + z \cos(z^2) dz \quad 3. \quad \oint_{\gamma_{2i,3}} \frac{\sin(iz)}{(z-1)(z^2+4)} dz$$

II^A . Igazoljuk az $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2p \cos x + p^2} dx = \frac{2\pi}{1 - p^2}$ egyenlőséget, ahol $p \in]0, 1[$.

(Útmutatás: A $z = e^{ix}$ helyettesítéssel az integrált körintegrállá lehet transzformálni.)

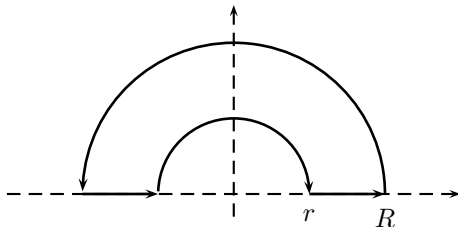
III^A . Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ számra $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$ teljesül.

(Útmutatás: Adott $R \in]a, \infty[$ paraméter esetén írjuk fel a $g : \mathbb{C} \setminus \{\pm ia\} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(x) = \frac{-e^{ix}}{x^2 + a^2}$ függvény ábrán látható görbementi integrálját, melynek az értékét számoljuk ki a Cauchy-formulával, majd vegyük az $R \rightarrow \infty$ határértéket.)



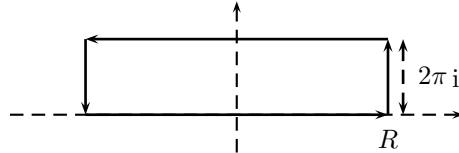
IV^A . Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}^+$ paraméterre $\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(b - a)$ teljesül.

(Útmutatás: Legyen $r \in]0, \min(a, b)[$, $R \in]\max(a, b), \infty[$, és az $f(z) = \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$ függvényt integráljuk az ábrán látható görbén, majd vegyük az $R \rightarrow \infty$ és $r \rightarrow 0$ határértéket.)



V^A . Legyen $p \in]0, 1[$, bizonyítsuk be az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ egyenlőséget.

(Útmutatás: Legyen $R \in]p, \infty[$ és integráljuk az $f(z) = \frac{e^{pz}}{1+e^z}$ függvényt az ábrán látható görbén, majd vegyük az $R \rightarrow \infty$ határértéket.)



VI^A . Igazoljuk a $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ formulát.

(Útmutatás: Legyen $r, R \in \mathbb{R}^+$, $r < R$ és az $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ függvényt integráljuk az ábrán látható görbén, majd vegyük az $R \rightarrow \infty$ és $r \rightarrow 0$ határértéket.)

