Analízis 1, 13. hét

Cauchy integrálformulái, reziduum számítás és Laurent-sorfejtés

I$^{\text{A}}$. Igazolja az alábbi $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvények 0 pontbeli reziduumára vonatkozó összefüggéseket.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z+z^2}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = 1.$
2. $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = \dfrac{-1}{2}.$
3. $f(z) = \dfrac{z-\sin z}{z^4}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = \dfrac{1}{6}.$
4. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z^4(1-z^2)}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = \dfrac{7}{6}.$
5. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^4}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = \dfrac{-1}{45}.$
6. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\ln(1+z)}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = 1.$

II$^{\text{A}}$. Határozzuk meg az $f(z)$ függvények z_0 pont körüli Laurent-sorfejtését minden lehetséges tartományon.

1. $f : \mathbb{C}\setminus\{-1\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \dfrac{1}{z+1} \quad z_0 = \mathrm{i}$
2. $f : \mathbb{C}\setminus\{-1,\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \dfrac{1}{(z+1)(z-\mathrm{i})} \quad z_0 = \mathrm{i}$
3. $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \mathrm{e}^z + \dfrac{1}{z} \quad z_0 = 2$

III$^{\text{A}}$. A Cauchy-féle integrálformula alapján igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ esetén $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{a}$ és $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2a^3}$ teljesül.

(Útmutatás: Az $f(z) = \dfrac{1}{(z+\mathrm{i}\,a)^k}$ $(k=1,2)$ függvény esetén számoljuk ki a Cauchy-formulával az $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i}\,a)^k}\,\mathrm{d}\,z$ integrál értékét, ahol γ a $[-R,R] \subseteq \mathbb{R}$ szakaszból (ahol $a < R$) és az R pontot a $-R$ pontottal összekötő origó középpontú pozitív félsíkban haladó félkörív. Majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)

IV$^{\text{A}}$. Tekintsük az $f : \mathbb{C}\setminus\{-1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z+1)^3}$ függvényt.

1. Írjuk fel a függvény $z_0 = -1$ pont körüli Laurent-sorát.
2. Vizsgáljuk meg a szingularitás jellegét és adjuk meg a függvény reziduumát a szinguláris pontban.
3. Számoljuk ki a $\displaystyle\oint_{\gamma_{-2,2}} f$ és a $\displaystyle\oint_{\gamma_{-5,1}} f$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c \in \mathbb{C}$ középpontú $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.

V$^{\text{A}}$. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ diszkrét zárt halmaz és $f, g : \mathbb{C}\setminus D \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy $f-g$ függvénynek a D halmaz minden pontjában létezik határértéke, $\displaystyle\sup_{z\in\mathbb{C}\setminus D} |f(z)-g(z)| < \infty$ és $\displaystyle\inf_{z\in\mathbb{C}\setminus D} |f(z)-g(z)| = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f = g$.

VI$^{\text{A}}$. Az V. feladat alapján igazoljuk az alábbi összefüggéseket.

1. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}:$ $$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$$
2. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right):$ $$\frac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z+k-\frac{1}{2}\right)^2}$$
3. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}:$ $$\operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2}$$
4. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right):$ $$\operatorname{tg}(\pi z) = \frac{2z}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(k+\frac{1}{2}\right)^2}$$

VII$^{\text{A}}$. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan egész függvény, melyre minden $10 < |z|$ esetén $|f(z)| \leq 57 \ln(|z|)$ teljesül, valamint $f(\mathrm{i}) = 1$. Mit mondhatunk $f(3 + 4\,\mathrm{i})$ értékéről?

VIII$^{\text{A}}$. Legyen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan egész függvény, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén $|f(z)| \leq |g(z)|$ teljesül. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{C}$, hogy $f = cg$.