Analízis 1, 14. hét

Komplex függvénytan néhány alaptétele

I. (*Schwarz-lemma.*) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f : B_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, és $C \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $z \in B_r(a)$ esetén $|f(z) - f(a)| \le C$. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra

$$|f(z) - f(a)| \le C \frac{|z-a|}{r}$$

teljesül, valamint $|f'(a)| \le \dfrac{C}{r}$.

II. (*Casorati–Weierstrass-tétel.*) Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek lényeges szingularitása van az a pontban. Ekkor minden $\rho \in \,]0, r[$ esetén $\overline{f\left(B_\rho(a) \setminus \{a\}\right)} = \mathbb{C}$.

III. (*Holomorf függvények lokálisan egyenletesen sorozatának határértéke.*) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, akkor az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény szintén holomorf; minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon és $f^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}$.

IV. (*Hurwitz-tétel.*) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az U halmazon értelmezett komplex értékű holomorf függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozata az $f : U \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla határfüggvénnyel. Ekkor egy $z \in U$ elem pontosan akkor gyöke az f függvénynek, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N \le n$ számra az f_n függvénynek van gyöke a $B_\varepsilon(z)$ halmazban.

V. Legyen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan valós együtthatós polinom, hogy a q polinomnak nincs valós gyöke és $\deg q \ge 2 + \deg p$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \, \mathrm{d}\, x = 2\pi \,\mathrm{i} \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \Im a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}, a\right)$$

$$\forall \alpha \in \,]0, 2\pi[\, : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(\alpha x) \, \mathrm{d}\, x + \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(\alpha x) \, \mathrm{d}\, x = 2\pi \,\mathrm{i} \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \Im a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}, a\right)$$

$$\forall \alpha \in \,]-1, 1[\, : \int_{0}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} x^\alpha \, \mathrm{d}\, x = \frac{\pi \,\mathrm{i}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \cdot \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\pi\alpha}{2}\right) \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}:\ q(a)=0,\\ \Im a>0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} z^\alpha, a\right)$$