Analízis 1.
1. pótzárthelyi dolgozat
2023. 11. 17. 12.15-13.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Tekintsük az $M =]0,\infty[$ halmazon a $d : M \times M \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \left|\log_2\left(\dfrac{x}{y}\right)\right|$ függvényt. *(3+5+7 p.)*
   a.) Igazolja, hogy d metrika az M halmazon.
   b.) Adja meg a $B_2(3)$ halmaz elemeit. (Az $x \in M$ pont körüli nyílt $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömböt jelöli $B_r(x)$.)
   b.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to M$, $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ sorozatot. Ez a sorozat korlátos-e, Cauchy-sorozat-e, illetve konvergens-e?

2. Legyen $M = \mathbb{R}^2$ és d az euklidészi metrika, valamint *(6+5 p.)*

$$A = \left\{(x,y) \in M \mid 0 < x < 2,\ 0 < y \le x^2\right\} \cup \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right) \in M \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

   a.) Határozza meg az A halmaz belső, torlódási és izolált pontjait.
   b.) Határozza meg az A belsejét és lezártját.

3. Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér, ahol d_2 a diszkrét metrika, és legyen $f : M_1 \to M_2$ folytonos injektív függvény. Mutassa meg, hogy az M_1 tér minden pontja izolált pont. *(10 p.)*

4. Legyen $M_1 = M_2 = M =]0,\infty[$, minden $x, y \in M$ pontra legyen $d_1(x,y) = |x-y|$ és $d_2(x,y) = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|$. Tekintsük az $f, g : M_1 \to M_2$, $f(x) = x^4$ és $g(x) = x$ függvényeket. Folytonos-e, illetve egyenletesen folytonos-e az f és a g függvény? *(10 p.)*

5. Legyen $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Számolja ki a $\sin\left(\dfrac{D\pi}{2}\right)$ mátrixot. *(12 p.)*