Analízis 1.
1. zárthelyi dolgozat
2023. 10. 24. 8.15-9.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Tekintsük az $M = \mathbb{R}$ halmazon a $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \left|3^{-x} - 3^{-y}\right|$ metrikát. *(5+7 p.)*
   a.) Adja meg a $B_1(1)$ és a $B_2(0)$ halmaz elemeit. (Az $x \in M$ pont körüli nyílt $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömböt jelöli $B_r(x)$.)
   b.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to M$, $a_n = n$ sorozatot. Ez a sorozat korlátos-e, Cauchy-sorozat-e, illetve konvergens-e?

2. Legyen $M = \mathbb{R}^2$, d az euklidészi metrika az $\mathbb{R}^2$ síkon (azaz $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$), $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ és $d' = d|_{A \times A}$. Tekintsük az (A, d') metrikus alteret. Legyen $U =]0, 1[\times \{0\} \subseteq A$. Határozza meg az U halmaz belsejét az (M, d) és az (A, d') metrikus térben. Nyílt-e az U halmaz az (M, d) és az (A, d') metrikus térben? *(10 p.)*

3. Legyen V a valós $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomok halmaza. *(5+7 p.)*
   a.) Mutassa meg, hogy a
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |p(t)|$$
   leképezés norma a V vektortéren.
   b.) Legyen $\varphi, \psi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi(p) = p(1)$ és $\psi(p) = p(2)$. Folytonos-e a φ és ψ leképezés a $(V, \|\cdot\|)$ normált téren? Ha igen, számoljuk ki az operátornormájukat.

4. Legyen $M_1 = M_2 = M =]0, \infty[$, minden $x, y \in M$ pontra legyen $d_1(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ és $d_2(x, y) = |x - y|$. Tekintsük az $f, g : M_1 \to M_2$, $f(x) = \frac{1}{x}$ és $g(x) = x$ függvényeket. Folytonos-e és egyenletesen folytonos-e az f és g függvény? *(10 p.)*

5. Legyen $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Számolja ki a $\cos(D\pi)$ mátrixot. *(12 p.)*