

Analízis 1.
2. pótzárthelyi dolgozat
2023. 12. 12. 10.15-11.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ:

1. Legyen $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x, y) = \operatorname{sh}(2x) \sin(cy) - y$. (3×3 p.)

- a.) Határozza meg a $c \in \mathbb{R}^+$ paraméter értékét úgy, hogy v egy mindenhol értelmezett holomorf f függvény képzetes része legyen!
- b.) Írja fel ezen f függvények közül azt, amelynél az $f(i)$ tisztán képzetes szám, azaz $\operatorname{Re} f(i) = 0$.
- c.) Határozza meg $f' \left(\frac{i\pi}{4} \right)$ valós és képzetes részét!

2. Legyen γ az i körüli 1 sugarú, pozitív irányítású körív, mely egyszer kerüli meg az i pontot, valamint legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z} + \sin(z)$. Határozza meg az $\int_{\gamma} f$ integrál értékét! (6 p.)

3. Adott $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén $\Gamma(a, r)$ jelölje az a középpontú r sugarú zárt körívet pozitív irányítással. (Tehát $\operatorname{Ind}_{\Gamma(a,r)}(a) = 1$.) Számolja ki az alábbi integrálokat, adja meg az integrál valós és képzetes részét. (5+6 p.)

a.) $\int_{\Gamma(1+i,2)} \frac{z^4 - 3z^3}{(z^2 + 4)^2} dz$

b.) $\int_{\Gamma(1,2)} \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{z^3 - 4z} dz$

4. Legyen $f : \mathbb{C} \setminus \{-2, -3i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3i)}$. Határozza meg az f függvény origó körüli Laurent-sorfejtését a (6+6 p.)

- a.) $2 < |z| < 3$ tartományon;
- b.) $3 < |z|$ tartományon.

5. Határozza meg az alábbi $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ függvények reziduumát a 0 pontban. (6+6 p.)

a.) $f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

b.) $g(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^4}$