

**Analízis 1.**  
**2. zárthelyi dolgozat**  
2023. 12. 05. 8.15-9.45

Név:  
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ:

1. Legyen  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(x, y) = \cos(2x) \operatorname{sh}(cy) + y$ . (3×3 p.)

- a.) Határozza meg a  $c \in \mathbb{R}^+$  paraméter értékét úgy, hogy  $v$  egy mindenhol értelmezett holomorf  $f$  függvény képzetes része legyen!
- b.) Írja fel ezen  $f$  függvények közül azt, amelynél az  $f(i)$  tisztán képzetes szám, azaz  $\operatorname{Re} f(i) = 0$ .
- c.) Határozza meg  $f'(i)$  értékét!

2. Legyen  $\gamma$  görbe a komplex számsíkon az 1 körüli 1 sugarú körívnek az a fele, mely az origóból indul és a 2 pontban végződik és a felső félsíkban halad (azaz a képzetes része sohasem negatív), valamint legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = 2z + \bar{z}$ . Határozza meg az  $\int_{\gamma} f$  integrál értékét! (6 p.)

3. Adott  $a \in \mathbb{C}$  és  $r \in \mathbb{R}^+$  paraméter esetén  $\Gamma(a, r)$  jelölje az  $a$  középpontú  $r$  sugarú zárt körívet pozitív irányítással. (Tehát  $\operatorname{Ind}_{\Gamma(a,r)}(a) = 1$ .) Számolja ki az alábbi integrálokat, adja meg az integrál valós és képzetes részét. (5+6 p.)

- a.)  $\int_{\Gamma(1+i,2)} \frac{\operatorname{ch}(z)}{z^2 + 4} dz$
- b.)  $\int_{\Gamma(1,3)} \frac{\sin(z + 2i)}{(z + 2i)^2 z} dz$

4. Legyen  $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, -3\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z+3)}$ . Határozza meg az  $f$  függvény origó körüli Laurent-sorfejtését a (6+6 p.)

- a.)  $1 < |z| < 3$  tartományon;
- b.)  $|z| < 1$  tartományon.

5. Legyen  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorf függvény. (6+6 p.)

- a.) Mit mondhatunk az  $f$  függvényről, ha  $f(1) = 1$  és minden  $|z| \geq 9$  komplex szám esetén  $|f(z)| \leq 3\sqrt{|z|}$  teljesül?
- b.) Tegyük fel, hogy minden  $|z| \leq 3$  komplex szám esetén  $g(z) \neq 0$ . Mutassa meg, hogy létezik olyan  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $|z_0| = 3$  komplex szám, melyre

$$\inf_{|z| \leq 3} |g(z)| = |g(z_0)|.$$