

Vizsgatematika

Analízis 1 BMETE92AM55, 2023/24 I. félév

- 1. Metrika, metrikus altér.** Metrika. Nyílt, zárt, korlátos halmaz metrikus térben és tulajdonságai. Halmaz belső, torlódási, határ- és izolált pontja. Halmaz lezártja, belseje és tulajdonságai. Metrikus altér fogalma. Nyílt és zárt halmazok jellemzése metrikus altéren. Halmaz lezártja metrikus altéren.
- 2. Sorozatok és kompakt halmazok.** Sorozat határértéke. Határérték egyértelműsége. Halmaz torlódási pontjának sorozatokkal való jellemzése. Halmaz zártságának sorozatokkal való jellemzése. Cauchy-sorozat fogalma és a Cauchy-sorozatok alaptulajdonságai. Kompakt halmazok és tulajdonságai. Relatív kompakt és lokálisan kompakt halmazok. Cantor-féle közösrésztétel.
- 3. Kompaktság sorozatokkal való jellemzése.** Relatív kompakt és lokálisan kompakt halmazok. Lebesgue-lemma. Bolzano–Weierstrass-tétel. Kompakt halmaz teljessége. Szeparábilis terek.
- 4. Függvények.** Függvények határértéke. Átviteli elv határértékekre. Függvény folytonossága. Átviteli elv folytonosságra. Folytonosság topologikus jellemzése. Folytonos függvények kompozíciója. Egyenlőségek folytatásának az elve. Nyílt függvény. Homeomorfizmus, izometria, kontrakció.
- 5. Folytonos függvények kompakt halmazon.** Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Egyenletesen folytonos függvények. Heine tétele. Sűrűn értelmezett egyenletesen folytonos függvények kiterjeszhetősége. Izometriák kiterjeszhetősége.
- 6. Kontrakciók és távolságfüggvény.** Kontrakció, Lipschitz-folytonos függvény. Banach-féle fixponttétel. Távolságfüggvény és tulajdonságai. Diszjunkt zárt halmazok szétválasztása. Metrikus tér teljessége tétele.
- 7. Összefüggő halmazok.** Ívszerűen összefüggő és összefüggő halmazok, valamint alaptulajdonságai. Metrikus tér összefüggőségének ekvivalens jellemzése. Metrikus altér összefüggősége. Összefüggő halmaz folytonos függvény általi képe.
- 8. Normált terek.** Norma. Nyílt, zárt és korlátos halmaz normált térben. Halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontja. Sorozatok és sorok konvergenciája. Cauchy-sorozatok. Banach-terek. Folytonos lineáris leképezés normája. A folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai. Carl–Neumann-féle sor. Ekvivalens normák.
- 9. Normált terek tulajdonságainak jellemzése.** Véges dimenziós normált terek tulajdonságai. Kompaktság jellemzése véges dimenziós normált terekben. Elpé terek. Összefüggő nyílt halmazok normált terekben. Normált terek szorzata. Normált terek teljes burka.
- 10. Skalárszorzos terek.** Skaláris szorzás. Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Ortogonális, normált, ortonormált és teljes vektorrendszer. Hilbert-tér. Bessel-egyenlőtlenség. Parseval-egyenlőség. Zárt altértől való távolság minimuma.
- 11. Riesz-féle reprezentációs tétel.** Vektor projekciója zárt altér. Zárt altér és ortogonális kiegészítőjének tulajdonságai. Zárt altérre való ortogonális projekció tulajdonságai. Riesz-féle reprezentációs tétel.

12. **Függvénysorozatok és függvénysorok.** Függvénysorozat és függvénysor pontonkénti, egyenletes és lokálisan egyenletes konvergenciája. Weierstrass-tétel a függvénysor egyenletes konvergenciájáról. Hatványsor. Cauchy–Hadamard-tétel. Lineáris leképezés függvényének értelmezése.
13. **Approximáció.** Lineáris függvényháló. Szétválasztó függvényhalmaz. Bernstein-polinomok. Bernstein-polinomokkal való egyenletes approximáció. Stone-tétel. Stone–Weierstrass-tétel.
14. **Differenciálás.** Normált terek között ható leképezések deriválhatósága és deriváltja. Függvények kompozíciójának deriválása. Az invertálás és a hatványfüggvény deriváltja.
15. **Komplex függvény deriváltja.** Komplex függvény differenciálhatósága és komplex függvény deriváltja. A differenciálhatóság jellemzése a Cauchy–Riemann-egyenletekkel. Holomorf függvény. Szakaszonként folytonosan differenciálható görbe és folytonos komplex függvény görbementi integrálja. A görbementi integrál tulajdonságai.
16. **Elemi integráltételek és az indexfüggvény.** Newton–Leibniz-tétel. Goursat-lemma. Függvény primitív függvénye. Görbe indexfüggvénye. A körvonal indexfüggvénye. Az indexfüggvény tulajdonságai.
17. **Cauchy tételei.** Kontúrhomotóp görbék. A komplex számsík egyszeresen összefüggő részhalmazai. Cauchy integráltétele és integrálformulái. Folytonos függvény görbe szerinti Cauchy-transzformáltja.
18. **Taylor-sorfejtés.** Cauchy-transzformált tulajdonságai. Holomorf függvény Taylor-sora. Magasabbrendű deriváltakra vonatkozó Cauchy-formulák. Megszüntethető szingularitások tétele. Morera-tétel. Cauchy-egyenlőtlenség. Liouville-tétel.
19. **Laurent-sorfejtés.** Holomorf függvény zérushelyeinek tulajdonsága. Zérushely multiplicitása. Laurent-sorfejtés. Szingularitás, n -ed rendű pólus, lényeges szingularitás. Meromorf függvény. Reziduum-tétel.
20. **Reziduum-tételek és következményei.** Argumentum-elv. Rouché-tétel. Nyílt leképezés tétele. Lokális maximum elve. Schwarz-lemma. Casoratti–Weierstrass-tétel. Holomorf függvények lokálisan egyenletesen sorozatának határértéke Hurwitz-tétel.