

**Kalkulus 2.**  
**1. Pótzárthelyi dolgozat**  
2024. 05. 28. 8.15-9.45

Név:  
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ:

1. Legyen  $f : [-1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$ . (5 + 5 p.)

a.) Írja fel az  $f$  függvény  $a = 0$  pont körüli elsőfokú Taylor-polinomját.

b.) Legyen  $b = \frac{1}{32}$  és a függvény értékét a  $b$  pontban közelítsük az elsőfokú Taylor-polinom  $b$  pontban

felvett értékével. Ezek alapján igazolja, hogy  $\left| \sqrt[5]{33} - \frac{161}{80} \right| \leq \frac{1}{6400}$ .

2. Legyen  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq \sqrt{x}, 0 < x < 4\}$ . (3 + 5 + 4 p.)

a.) Vázlatosan rajzolja fel az  $A$  halmazt.

b.) Adja meg az  $A$  belső és torlódási pontjait.

c.) Adja meg az  $\bar{A}$  halmazt.

3. Határozza meg a  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{3x^4 + 2y^2}$  és a  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$  határértéket, ha az létezik. (4 + 4 p.)

4. Legyen  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{4 + \frac{x}{\sqrt{5}}}$ . (5 + 5 p.)

a.) Mutassa meg, hogy  $f$  kontrakció.

b.) Legyen  $x_0 = \pi$  és minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Mi lesz a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  határérték?

5. Tekintsük a  $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 3^k} x^k$  hatványsort. (5 + 5 p.)

a.) Pontosan mely  $x \in \mathbb{R}$  értékek esetén konvergens a  $P(x)$  hatványsor?

b.) Igazolja, hogy  $\int_0^3 P(x) dx = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + k}$  teljesül.

6. Minden  $n \in \mathbb{N}^+$  esetén legyen  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{x^2 + n^2}$ . (10 p.)

a.) Igazolja, hogy az  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  határérték minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén konvergens.

b.) Számolja ki  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{3}} f_n(x) dx$  értékét.