Kalkulus 2.
2. Pótzárthelyi dolgozat
2024. 05. 28. 10.15-11.45

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Tekintsük az *(16 p.)*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

függvényt.

a.) Számolja ki a $\partial_1 f$ és a $\partial_2 f$ mennyiséget.

b.) Igazolja, hogy $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ nem folytonos az origóban.

c.) Igazolja, hogy az f függvény differenciálható az origóban. (A differenciálhatóság definíciója alapján.)

d.) Igazolja, hogy az f függvény folytonosan differenciálható az $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ halmazon.

2. Jelölje r az $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ identitásfüggvényt (azaz $r(x,y,z)=(x,y,z)$) és legyen $a=(1,2,3)\in\mathbb{R}^3$. *(10 p.)*

a.) Határozza meg a $\operatorname{rot}\left(\|r\|^2\cdot a\right)$ függvényt.

b.) Határozza meg a $\operatorname{div}\left(\|r\|\cdot\operatorname{grad}\log\|r\|^3\right)$ függvényt.

3. Legyen $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igazolja, hogy a $h:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $h(x,y)=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ függvény érintősíkjai átmennek az origón. *(10 p.)*

4. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(t,u,v)=(t\,e^u+u\,e^v, t\,e^v+v\,e^u)$ függvényt és a $(t_0,u_0,v_0)=(-1,1,1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ pontot. (Ekkor $f(t_0,u_0,v_0)=(0,0)$.) *(12 p.)*

a.) Az implicitfüggvény-tétel alapján igazolja, hogy létezik olyan $U\subseteq\mathbb{R}$ nyílt környezete a t_0 pontnak és olyan $u,v:U\to\mathbb{R}$ differenciálható függvények, hogy minden $t\in U$ esetén $f(t,u(t),v(t))=(0,0)$ teljesül.

b.) Határozza meg $u'(0)$ és $v'(0)$ értékét.

5. Tekintsük az $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x-y+z$ függvényt és az $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+z^2=4\right\}$ felületet. Mely pontokban lehet lokális szélsőértéke az $f|_S$ függvénynek? *(12 p.)*