Kalkulus 2.
2. Zárthelyi dolgozat
2024. 05. 13. 8.15-9.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Tekintsük az *(16 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+x-y, & \text{ha} \quad (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

függvényt.

a.) Számolja ki a $\partial_1 f$ és a $\partial_2 f$ mennyiséget.

b.) Igazolja, hogy f függvény folytonosan differenciálható.

c.) Legyen $a\in\mathbb{R}^2$ olyan egységvektor, amely párhuzamos és egyállású a $(4,3)$ vektorral. Számolja ki az $(\mathrm{D}_a f)(1,1)$ értékét.

d.) Adja meg az f függvény $(1,1)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét.

2. Jelölje r az $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ identitásfüggvényt (azaz $r(x,y,z)=(x,y,z)$). *(10 p.)*

a.) Határozza meg a $\operatorname{grad}\left(\mathrm{e}^{-\|r\|^2}\right)$ függvényt.

b.) Határozza meg a $\Delta\left(\mathrm{e}^{-\|r\|^2}\right)$ függvényt.

3. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-4xy+2y^2$ és $a=(1,2)$. *(10 p.)*

a.) Mely $v\in\mathbb{R}^2$ egységvektor esetén lesz a $(\mathrm{D}_v f)(a)$ iránymenti derivált a legnagyobb?

b.) Számolja ki a $(\mathrm{D}^2 f)(a)(u,u)$ mennyiséget, ahol $u=(1,-1)$.

4. Tekintsük az $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(y^3+y^2+pz,\, y^2+2z,\, xy+z^2)$ függvényt, ahol $p\in\mathbb{R}$ paraméter, valamint az $a=(1,1,2)\in\mathbb{R}^3$ pontot. *(12 p.)*

a.) Az inverfüggvény-tétel alapján a p paraméter mely értékei esetén létezik olyan $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ függvény, mely az $f(a)$ pont egy környezetén értelmezett, $\varphi(f(a))=a$ és minden $z\in\operatorname{Dom}\varphi$ pontra $f(\varphi(z))=z$ teljesül?

b.) A $p=0$ esetben, határozza meg a $(\mathrm{D}\,\varphi)(f(a))$ deriváltat.

5. Határozza meg az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x^2-y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ függvény lokális szélsőértékeit. *(12 p.)*