Számítási módszerek a fizikában 1, 3. hét

Komplex számok trigonometrikus alakja, logaritmusa, hatványozása és trigonometrikus függvényei

I. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

$$\ln(-3\,\mathrm{i}) \qquad \ln\left(-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\right) \qquad \ln(1-\mathrm{i}) \qquad \ln\left(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$$

(Ha $z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, ahol $0 < |z|$ és $-\pi \le \varphi < \pi$, akkor $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\varphi$.)

II. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

$$2^{2\,\mathrm{i}} \qquad \left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}}\right)^{2\,\mathrm{i}} \qquad \mathrm{i}^{2\,\mathrm{i}} \qquad \left(\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right)^{1+\mathrm{i}}$$

(Ha $z, v \in \mathbb{C}$ és $z \neq 0$, akkor $z^v = \mathrm{e}^{v\ln z}$.)

III. A komplex számtest felett oldjuk meg az egyenleteket.

1. $z^3 = \bar{z}$
2. $z^2 - 5(1+\mathrm{i})z + 13\,\mathrm{i} = 0$
3. $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$
4. $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$

IV. Geometriai sor összegképletére visszavezethető feladatok.

1. Minden $n, k \in \mathbb{N}$ számra $n \neq 0, 1$ esetén legyen $z_k = \exp\left(\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,k}{n}\right)$. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{C}$ esetén teljesülnek az alábbi formulák.

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)\sin\left(a+\frac{nb}{2}\right)}{\sin\frac{b}{2}} \qquad \sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)}{\sin\frac{b}{2}}$$

3. Számoljuk ki $\sum_{k=1}^{20}(1+\mathrm{i})^k$ értékét algebrai alakban.

V. Trigonometrikus (hiperbolikus és inverz) függvények.

1. Mely természetes számot határoznak meg az alábbi kifejezések?

$$-4\,\mathrm{i}\,\mathrm{ch}\left(\log(2)+\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}\right) \qquad -6\cos\left(\pi+\mathrm{i}\log(3)\right) \qquad 12\,\mathrm{th}\left(\log(5)+\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}\right) \qquad 17\frac{\mathrm{th}\left(\frac{\pi}{4}-\log(2)\,\mathrm{i}\right)}{8-15\,\mathrm{i}}$$

2. Egyszerűsítsük az alábbi kifejezéseket.

$$\cos\arcsin\frac{1}{3} \qquad \sin\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} \qquad \mathrm{th}\,\mathrm{arch}\,2 \qquad \mathrm{ch}\,\mathrm{arsh}\,2$$

3. Adjuk meg az alábbi egyenletek összes megoldását a komplex számok körében.

$$\cos(z) = \frac{5}{4} \qquad \mathrm{ch}(z) = -1$$