Számítási módszerek a fizikában 1, 6. hét

Lineáris alterek, elemi mátrixműveletek és lineáris transzformációk mátrixa

I. Lineáris alterek.

1. Az $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ függvénytérben alteret alkotnak-e a következő halmazok?

$$\begin{array}{ll} 1. & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)=1\} \\ 2. & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1)=0\} \\ 3. & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x)\leq 0\} \end{array}$$

2. A valós sorozatok $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ terében alteret alkotnak-e az alábbi halmazok?

$$\begin{array}{ll} 1. & \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \ : \ a_1 = 2a_3 + 3a_5\} \\ 2. & \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \ : \ a_2 = a_4 a_5\} \\ 3. & \left\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \ : \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right\} \\ 4. & \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \ : \ a \text{ számtani sorozat}\} \end{array}$$

II. Lineáris függetlenség.

1. Ha u és v lineárisan független vektorok, akkor milyen α és β paraméterek esetén lesznek az $\alpha u + \beta v$, $u+v$ vektorok lineárisan függetlenek?
2. Igaz-e, hogy ha az $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ vektorok közül bármely 9 vektor lineárisan független, akkor mind a 10 is lineárisan független?
3. Hány lineárisan független vektor van a

$$v_1 = (1,1,1,1) \quad v_2 = (2,2,1,4) \quad v_3 = (1,-1,1,-1) \quad v_4 = (2,1,1,3)$$

vektorok között?
4. Az $\left\{a + b\cos(x) + c\cos^2(x) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$ térben bázist alkotnak-e az $1+\cos(x)$, $\cos(x) + \cos^2(x)$ és $\cos(2x)$ vektorok?

III. Mátrixhatványok.

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok k-adik ($k \in \mathbb{N}$) hatványát.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

2. Egy A mátrix esetén legyen

$$\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \ .$$

Számítsuk ki az e^A mátrixot, ha az A mátrix a következő alakú, valamilyen $t \in \mathbb{R}$ valósra.

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV. Legyen $b \in \mathbb{R}^3$ rögzített vektor. Mi lesz az $\mathbb{R}^3$ tér standard bázisában a

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad x \mapsto b \times x$$

lineáris leképezés mátrixa?

V*. Legyen $\omega \in \mathbb{R}^3$, $\|\omega\| \leq \pi$ vektor. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az ω vektor által meghatározott tengely körül forgat $\|\omega\|$ szöggel.