Számítási módszerek a fizikában 1, 7. hét

Skalárszorzatos vektorterek és lineáris leképezések rangja

I. Legyen $V = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R} \right\}$, azaz V a $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomok vektortere, továbbá legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ paraméter.

1. Mutassuk meg, hogy a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R} \qquad (p,q) \mapsto \int_0^\alpha p(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x$$

   leképezés skaláris szorzás.
2. Mekkora a $p(x) = x^2 + 1$ és a $q(x) = x^3$ polinomok által bezárt szög a V vektortében?

II. Skaláris szorzás a síkon.

1. Mutassuk meg, hogy a $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren a $p, q \in \mathbb{R}$ paraméterekkel definiált

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 - px_1y_2 - qx_2y_1$$

   leképezés pontosan akkor skaláris szorzás, ha $p = q \in \,]-1,1[$ teljesül.
2. Legyen $p \in \,]-1,1[$ paraméter és

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 - px_1y_2 - px_2y_1.$$

   Mely p értékek esetén lesz az $(1,0)$ és az $(1,1)$ vektorok által bezárt szög $30°$, $45°$ és $60°$?

III. Adjuk meg az alábbi skalárszorzatos vektorterekben a kezdeti vektorok Gram–Schmidt ortogonalizáltját!

1. A vektortér az $\mathbb{R}^3$ a megszokott skaláris szorzással, a kezdeti vektorok $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (-1,2,-1)$ és $v_3 = (3,2,1)$.
2. A vektortér a legfeljebb másodfokú polinomok tere, két vektor skaláris szorzata $\langle p,q\rangle = \int_0^1 (pq)$, a kezdeti vektorok $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ és $p_3(x) = x^2$.

IV. Legyen az $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az A magterét, képterét és rangját.