Számítási módszerek a fizikában 1, 8. hét

Mátrix rangja, nyoma, transzponáltja és adjungáltja

I. Rangszámítás.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját ($a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{pmatrix}$$

2. Mely $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén lesz az alábbi mátrixok rangja 1, 2, illetve 3?

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 4 & a & b \\ 3a & b+3 & 0 \end{pmatrix}$$

II. Jelölje $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ az $n \times n$-es olyan négyzetes mátrixok halmazát, melynek elemei a $\mathbb{K}$ számtestből vannak. Tekintsük a

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \qquad A \mapsto \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$$

leképezést. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned} &\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : && \mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \\ &\forall A\, \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : && \mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{Tr}(A) \\ &\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : && \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \end{aligned}$$

teljesül. Igaz-e, hogy minden $A, B, C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix esetén $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$ teljesül?

III. Jelölje $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ az $n \times m$-es olyan négyzetes mátrixok halmazát, melynek elemei a $\mathbb{K}$ számtestből vannak. Tekintsük a

$$^{\mathrm{T}} : \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad [A_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \mapsto [A_{ji}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

leképezést. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K}) : && A^{\mathrm{T}\,\mathrm{T}} = A \\ &\forall A, B \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K}) : && (A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} \\ &\forall A\, \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K})\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : && (\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} \\ &\forall A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K})\ B \in \mathrm{M}_{m,k}(\mathbb{K}) : && (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

teljesül.

IV. Tekintsük a

$$^{*} : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \qquad [A_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \mapsto \left[\overline{A_{ji}}\right]_{i,j=1,\dots,n}$$

leképezést. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : && A^{**} = A \\ &\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : && (A+B)^* = A^* + B^* \\ &\forall A\, \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : && (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* \\ &\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : && (AB)^* = B^* A^*. \end{aligned}$$

V. Jelölje $\mathcal{P}_2$ a legfeljebb másodfokú valós polinomok vektorterét és tekintsük az alábbi $\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ leképezéseket.

$$\begin{aligned} A &: p(x) \mapsto p(x+1) \\ B &: p(x) \mapsto xp'(x) \\ C &: p(x) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x \cdot p(x)) \end{aligned}$$

Írjuk fel a fenti leképezések mátrixát az $e_k(x) = x^{k-1}$ $(k = 1, 2, 3)$ bázisban.

VI. Az $\mathbb{R}^2$ térben tekitsük az $f_1 = (1, 1)$ és az $f_2 = (2, -1)$ vektorokból álló f bázis. Mi lesz az x (első koordináta-) tengelyre való tükrözés mátrixa az $f - f$ bázisban?

VII. Mutassuk meg, hogy az $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ térben az

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vektorok básit alkotnak. Mi lesz a transzponálás műveletének mátrixa ebben a bázisban?

VII. Mutassuk meg, hogy a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \qquad (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^* B)$$

leképezés skaláris szorzás. Ezzel a skaláris szorzással ellátva az $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ teret, mekkora szöget zárnak be egymással az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$ vektorok?