Számítási módszerek a fizikában 1, 11. hét

Ortogonális kiegészítő és spektrális felbontás

I. Legyen $A : V \to V$ lineáris leképezés a skalárszorzatos véges dimenziós V vektortéren. Mutassuk meg, hogy $(\operatorname{Ran} A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*$ teljesül.

II. Legyen V véges dimenziós skalárszorzatos vektortér. Igazoljuk az alábbi állításokat.

1. Minden nem üres $L \subseteq V$ esetén $L^{\perp}$ lineáris altér.
2. Minden nem üres $L \subseteq K \subseteq V$ esetén $K^{\perp} \subseteq L^{\perp}$.
3. Minden nem üres $L \subseteq V$ esetén $L \subseteq L^{\perp\perp}$.
4. Ha $W \subseteq V$ lineáris altér, akkor $W = W^{\perp\perp}$.

III. Legyen V komplex sámtest feletti véges dimenziós skalárszorzatos vektortér.

1. Legyen $P : V \to V$ projekció és $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Adjuk meg a $(P - \lambda)^{-1}$ operátort.
2. Legyen $S : V \to V$ önadjungált leképezés és $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Adjuk meg az $(S - \lambda)^{-1}$ operátort.
3. Legyen $U : V \to V$ unitér leképezés és $\lambda \in \mathbb{C}$, melyre $|\lambda| \neq 1$. Adjuk meg az $(U - \lambda)^{-1}$ operátort.

IV. Vizsgáljuk meg, hogy a normális, az önadjungált, a projekciók és az unitér mátrixok halmaza zárt-e az összeadásra, számmal való szorzásra, illetve a szozásra nézve.

V. Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ mátrixot.

1. Határozzuk meg a mátrix $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$, sajátértékeit és $(v_i)_{i=1,2,3}$ sajátvektorait.
2. Írjuk fel az A mátrixot $S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} S$ alakban.
3. Minden v_i $(i = 1, 2, 3)$ sajátvektorhoz határozzuk meg azt a P_i projekciót, mely az origón átmenő v_i irányvektorú egyenesre vetít merőlegesen.
4. Mutassuk meg, hogy $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ teljesül.

VI*. Tegyük fel, hogy két $m \in \mathbb{R}^+$ tömegű pontszerű részecske egy egyenes mentén mindenféle surlódás nélkül elmozdulhat és közöttük egy $h \in \mathbb{R}^+$ nyugalmi hosszúságú és $D \in \mathbb{R}^+$ direkciós erejű rugó van. Az egyik, illetve másik részecske helyét az idő függvényében az x_1 és az x_2 függvény írja le. Tegyük fel, hogy $x_1(0) = 0$ és $x_2(0) > 0$.

1. Mutassuk meg, hogy az $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix, az $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, a $\alpha = \dfrac{D}{m}$ és a $d = \alpha h \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok segítségével a mozgásegyenlet felírható az $\ddot{x}(t) = Ax(t) + d$ alakban.
2. Igazoljuk, hogy a $z(t) = x(t) + h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ változó bevezetésével a mozgásegyenlet a $\ddot{z}(t) = \alpha A z(t)$ alakra hozható.
3. Tegyük fel, hogy a mozgásegyenletnek a $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvény egy megoldása. Mutassuk meg, hogy minden $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ paraméter esetén $\tilde{z}(t) = z(t) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is megoldása a mozgásegyenletnek. Fizikailag hogyan interpretálnánk ezt a jelenséget?
4. Határozzuk meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.
5. Adjuk meg, hogy a sajátvektorokra milyen differenciálegyenlet teljesül.
6. Oldjuk meg a sajátvektorokra adódó differenciálegyenleteket.