Számítási módszerek a fizikában 1, 12. hét

Mátrixfüggvények

I. Tekintsük az alábbi mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Írjuk fel a mátrixokat SDS^{-1} alakban, ahol D diagonális mátrix.
3. Adjuk meg a mátrixok spektrálfelbontását.
4. Határozzuk meg a mátrixok századik hatványát.
5. Számoljuk ki az $f(A)$ és az $f(B)$ mátrixot, ahol $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Megoldás:

1. $\lambda_1 = -1$, $v_1 = (2, -1)$, $\lambda_2 = 4$, $v_2 = (1, 2)$
2. Ha $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, akkor $S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, valamint $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ esetén $A = SDS^{-1}$.
3. $A = 4 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A^{100} = 4^{100} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{100} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
5. $f(A) = \sin\left(\frac{\pi 4}{2}\right) \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \sin\left(\frac{\pi(-1)}{2}\right) \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

II. Tekintsük az alábbi mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \sqrt{2}\begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Írjuk fel a mátrixok spektrálfelbontását.
3. Számoljuk ki a $\sin\left(\frac{\pi A}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi B}{2}\right)$ és $\cos\left(\frac{\pi C}{2}\right)$ mátrixokat.

Megoldás.

1. $\lambda_1 = -2$, $v_1 = (0, -1, 1)$, $\lambda_2 = 0$, $v_2 = (-2, 1, 1)$, $\lambda_3 = 6$, $v_3 = (1, 1, 1)$
2. $A = -2 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\sin\left(\frac{\pi A}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi(-2)}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \sin\left(\frac{\pi 0}{2}\right) \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \sin\left(\frac{\pi 6}{2}\right) \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

III. Tekintsük az $A = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixot.

1. Mutassuk meg, hogy az A mátrix normális, de nem önadjungált.
2. Határozzuk meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.
3. Írjuk fel a mátrix spektrálfelbontását.
4. Számoljuk ki az A^{100} mátrixot.

Megoldás.

1. Bevezetve a $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ önadjungált mátrixot, felírható, hogy $A = \mathrm{i}\,B$. Ekkor $AA^* - A^*A = \mathrm{i}\,B\bar{\mathrm{i}}B^* - \bar{\mathrm{i}}B^*\,\mathrm{i}\,B = B^2 - B^2 = 0$, vagyis A normális.
2. A B mátrix sajátértékei -5 és 5 a $v_1 = (2, -1)$ és $v_2 = (1, 2)$ sajátvektorokkal, ezért A sajátértékei $\lambda_1 = -5\,\mathrm{i}$ és $\lambda_2 = 5\,\mathrm{i}$ sajátvektorai pedig megegyeznek B sajátvektoraival.
3. $A = -5\,\mathrm{i} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 5\,\mathrm{i} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
4. $A^{100} = (-5\,\mathrm{i})^{100} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + (5\,\mathrm{i})^{100} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 5^{99}\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = 5^{100} I$

IV. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ teret az euklidészi skaláris szorzással és azt az $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezést, melynek mátrixa a standard bázisban $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Mutassuk meg, hogy A pozitív definit.
2. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan pozív mátrix létezik, melynek a négyzete A. (Ennek a jele $A^{\frac{1}{2}}$.)
3. Számoljuk ki az $A^{\frac{1}{2}}$ mátrixot.
4. Hány olyan (valós) mátrix van, melynek a négyzete A?

V*. Legyen $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ és $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Mutassuk meg, hogy A minden λ sajátértékére $0 < \lambda$ teljesül, ezért jól értelmezett a $\log A$ mátrix.
2. Mutassuk meg, hogy A és B spektrálfelbontásában ugyanazok a projekciók szerepelnek, ezért $AB = BA$.
3. Mutassuk meg, hogy $B(\log A) = (\log A)B$ teljesül.
4. Bizonyítsuk be, hogy $\exp(B(\log A)) = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$ (mely formálisan az A^B mátrixnak felel meg).