Számítási módszerek a fizikában 1, 13. hét

Rendezés a mátrixokon, kvadratikus kifejezések és rugós rendszerek

I. Rendezés az önadjungált mátrixok halmazán.

1. Adjunk meg olyan A, B önadjungált 2×2-es mátrixokat, melyre $A \nleq B$ és $B \nleq A$ teljesül.
2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $A \leq B$ és $A^2 \nleq B^2$.
3. Legyen P, Q $n \times n$-es komplex projekció. Mutassuk meg, hogy
$$P \leq Q \Longleftrightarrow P = PQ \Longleftrightarrow P = QP$$
teljesül.

II. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 8y + 8$.

1. Mutassuk meg, hogy alkalmas önadjungált A mátrixszal, b vektorral és c konstanssal $f(v) = \langle v, Av\rangle + \langle b, v\rangle + c$ alakra hozható.
2. Igazoljuk, hogy egy megfelelően választott z vektor és c' konstans segítségével $f(v + z) = \langle v, Av\rangle + c'$ alakra hozható a függvény. (Ez a teljes négyzetté alakítás.)
3. Vázoljuk az $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \; f(x, y) = 9\right\}$ ponthalmazt.

III. Az alábbi U_1 és U_2 halmazokat ábrázoljuk vázlatosan és határozzuk meg a területüket azzal a segítséggel, hogy az $a, b \in \mathbb{R}^+$ féltengelyű ellipszis területe az $\mathbb{R}^2$ euklidészi térben $T = ab\pi$.

$$U_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \; 3x^2 - 2xy + 3y^2 \leq 1\right\}$$

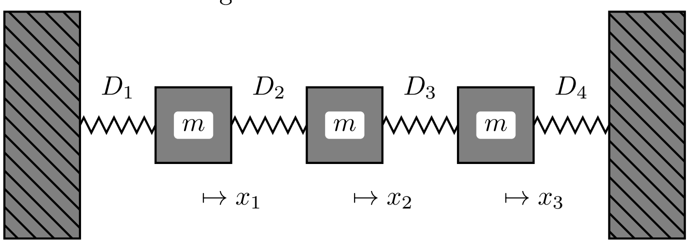
$$U_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \; 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y \leq 1\right\}$$

IV*. Határozzuk meg az alábbi Ω_1 és Ω_2 halmazok térfogatát (ahol $R \in \mathbb{R}^+$ paraméter) azzal a segítséggel, hogy az $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ féltengelyű ellipszoid térfogata az $\mathbb{R}^3$ euklidészi térben $V = \dfrac{4\pi abc}{3}$.

$$\Omega_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \; 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz + 2yz \leq R^2\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \; 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz + 2yz + 16x - 8y + 20z + 30 \leq R^2\right\}$$

V*. Tekintsük az alábbi ábrán látható rugós rendszert.



1. Mutassuk meg, hogy a tömegpontok mozgásegyenlete
$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + D_1 x_1 - D_2(x_2 - x_1) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + D_2(x_2 - x_1) - D_3(x_3 - x_2) &= 0 \\ m\ddot{x}_3 + D_3(x_3 - x_2) + D_4 x_3 &= 0, \end{aligned}$$
amit az összevont $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektoros jelöléssel az alábbi formában is felírhatunk.
$$\ddot{x} + Ax = 0 \qquad A = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} D_1 + D_2 & -D_2 & 0 \\ -D_2 & D_2 + D_3 & -D_3 \\ 0 & -D_3 & D_3 + D_4 \end{pmatrix}$$

2. Az A mátrix sajátértékeinek a gyökeit nevezzük a rendszer saját-körfrekvenciáinak (ω), melyekből a sajátfrekvencia a 2π számmal való osztással kapható ($f = \frac{\omega}{2\pi}$). Mutassa meg, hogy a $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D$ esetben az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 2\frac{D}{m}$, $\lambda_{2,3} = (2 \pm \sqrt{2})\frac{D}{m}$, vagyis a rendszer sajátfrekvenciái
$$f_1 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{D}{2m}}, \qquad f_{2,3} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2 \pm \sqrt{2})D}{m}}.$$
3. Adott $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $A_n(a)$ az az $n \times n$-es mátrix mely elemeire minden $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén
$$A_n(a)_{ij} = \begin{cases} a, & \text{ha} \quad i = j \\ -1, & \text{ha} \quad |i-j| = 1; \\ 0, & \text{ha} \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$
teljesül. Mutassuk meg, hogy ha n db. m tömegű testet helyezünk el a fenti ábrához hasonló módon azonos D direkciós állandójú rugókat használva, akkor a rendszer mozgásegyenlete az $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektorral az $\ddot{x} + \frac{D}{m}A_n(2)x = 0$ formában is felírható.
4. Tegyük fel, hogy egy $\alpha : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ sorozat elemeire minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} - \alpha_n$ teljesül valamilyen $a \in \mathbb{R}$ paraméterrel. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén
$$\alpha_n = \begin{cases} c_1\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n, & \text{ha} \quad |a| \neq 2; \\ c_1 + c_2 n, & \text{ha} \quad a = 2; \\ (-1)^n(c_1 + c_2 n), & \text{ha} \quad a = -2 \end{cases}$$
5. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $A_n(a)$ mátrix determinánsára
$$\det A_{n+2}(a) = a \det A_{n+1}(a) - \det A_n(a)$$
teljesül.
6. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $A_n(a)$ mátrix determinánsára
$$\det A_n(a) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2-4}}\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{-n-1}\right], & \text{ha} \quad |a| \neq 2; \\ n+1, & \text{ha} \quad a = 2; \\ (-1)^n(n+1), & \text{ha} \quad a = -2 \end{cases}$$
teljesül.
7. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén tekintsük a $\det A_n(a) = 0$ sajátérték egyenletet. Mutassuk meg, hogy ebből $|a| \neq 2$ és
$$\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} = \exp\left(2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{k}{2n+2}\right), \qquad k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$$
következik. Vagyis
$$a = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad k \in \{1, \dots, n\}.$$
8. Mutassuk meg, hogy ha n db. m tömegű testet helyezünk el az ábrához hasonló módon azonos D direkciós állandójú rugókat használva, akkor a rendszer sajátfrekvenciái
$$f_k = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{D}{2m}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)}, \qquad k \in \{1, \dots, n\}.$$