Számítási módszerek a fizikában 1, 14. hét

Mátrixcsoportok

I. Az $\mathbb{R}^n$ euklidészi térben minden $\mathcal{O}$ $n \times n$-es ortogonális mátrix és $a \in \mathbb{R}^n$ esetén tekintsük az

$$\varphi_{\mathcal{O},a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto \mathcal{O}x + a$$

transzformációt.

1. Mutassuk meg, hogy az $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha(x) = (x, 1)$ leképezés segítségével $\varphi_{\mathcal{O},a}$ hatása az alábbi módon is felírható.
$$x \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{O} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}x + a \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathcal{O}x + a$$
2. Adott $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ortogonális mátrixok és a_1, a_2 vektorok esetén, mely $\mathcal{O}$ mátrixra és a vektorra fog teljesülni az $\varphi_{\mathcal{O}_2,a_2}\varphi_{\mathcal{O}_1,a_1} = \varphi_{\mathcal{O},a}$ egyenlőség?
3. Adott $\mathcal{O}$ ortogonális mátrix és a vektor esetén mi lesz $\varphi^{-1}_{\mathcal{O},a}$?

II. Tekintsük az alábbi mátrixokat

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

melyek közül az utolsó hármat *Pauli-mátrixok*nak nevezik és a

$$\mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \sum_{k=1}^{3} x_k \sigma_k$$

leképezést, melynek értékét az $x \in \mathbb{R}^3$ vektoron $x \cdot \sigma$ jelöli.

1. Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}^3$ esetén
$$(x \cdot \sigma)(y \cdot \sigma) = \langle x, y \rangle \sigma_0 + \mathrm{i}(x \times y) \cdot \sigma$$
$$[(x \cdot \sigma), (y \cdot \sigma)] = 2 \langle x, y \rangle \sigma_0$$
teljesül, ahol $[A, B] = AB - BA$.
2. Mutassuk meg, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^3$ esetén az $t\sigma_0 + x \cdot \sigma$ mátrix determinánsa $t^2 - \langle x, x \rangle$.

III* Jelölje SO(3) a 3×3-as valós ortogonális egységnyi determinánsú mátrixok halmazát, továbbá vezessük be a $G = \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ jelölést. Minden $(R, v, a, \tau) \in G$ esetén legyen

$$\varphi_{R,v,a,\tau} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \qquad (x, t) \mapsto (Rx + tv + a, t + \tau).$$

1. Gondoljuk meg, hogy a tér (x) és az idő (t) koordináták milyen transzformációját modellezi a fenti leképezés.
2. Mutassuk meg, hogy az $\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\alpha(x, t) = (x, t, 1)$ leképezés segítségével $\varphi_{R,v,a,\tau}$ hatása az alábbi módon is felírható.
$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R & v & a \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rx + tv + a \\ t + \tau \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \begin{pmatrix} Rx + tv + a \\ t + \tau \end{pmatrix}$$
3. Adott $(R_1, v_1, a_1, \tau_1), (R_2, v_2, a_2, \tau_2) \in G$ elemek esetén, mely $(R, v, a, \tau) \in G$ elemre fog teljesülni az $\varphi_{R_2,v_2,a_2,\tau_2}\varphi_{R_1,v_1,a_1,\tau_1} = \varphi_{R,v,a,\tau}$ egyenlőség?
4. Adott $(R, v, a, \tau) \in G$ esetén mi lesz $\varphi^{-1}_{R,v,a,\tau}$?

A fenti G halmazt az utolsó feladatokban kiszámolt szorzás és inverz képzéssel *Galilei-csoport*nak nevezzük.