

Számítási módszerek a fizikában 1.

2. zárthelyi dolgozat 2024. 11. 25. 14.15-15.45

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ :

1. A $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren jelölje \mathcal{A} az $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ bázist, valamint \mathcal{B} az $f_1 = (1, 2)$, $f_2 = (1, 3)$ bázist. Egy $T : V \rightarrow V$ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{A} - \mathcal{A} bázisban (10 p.)

$$T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Írja fel a T leképezés mátrixát a \mathcal{B} - \mathcal{B} bázisban.

2. Tekintsük a következő egyenletrendszert, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméter. (10 p.)

$$\begin{cases} x + 2y + (a + b)z = 0 \\ 3x - 2y + az = b \\ -3x - 6y + (a - b)z = 2b \end{cases}$$

a.) Az a és b paraméter mely értéke esetén lesz az egyenletrendszernek nulla, egy illetve végtelen sok megoldása.

b.) Adja meg az egyenletrendszer megoldását a fenti esetekben.

3. Legyen $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & p \\ p & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ahol $p \in \mathbb{R}$ paraméter. (10 p.)

a.) A p paraméter mely értéke esetén létezik inverze a C mátrixnak?

b.) A $p = -1$ esetben számolja ki a C^{-1} mátrixot.

4. Mutassuk meg, hogy a (10 p.)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (A, B) \mapsto \text{Tr}(A^*B)$$

leképezés skaláris szorzás. Ezzel a skaláris szorzással ellátva az $M_2(\mathbb{R})$ teret, mekkora szöveget zárnak be egymással az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ vektorok?

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, valamint $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. (4×5 p.)

a.) Határozza meg az A mátrix $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sajátértékeit és a hozzájuk tartozó v_1, v_2, v_3 sajátvektorokat.

b.) Adja meg a v_i vektor által meghatározott egyenesre való ortogonális vetítés P_i mátrixát az $i = 1, 2, 3$ esetben.

c.) Adja meg az A mátrix spektrálfelbontását.

d.) Számolja ki az $f(A)$ mátrixot.