

# Vizsgatematika tervezet

Számítási módszerek a fizikában 1, 2024/25 I. félév

**1. Komplex számok.** Valós számok műveletei és axiómái. Komplex számok algebrai alakja. Komplex szám valós és képzetes része, konjugáltja, valamint abszolút értéke. Komplex számok összege, különbsége, szorzata és hányadosa. A rendezés nem általánosítható a komplex számtestre. Komplex sorozat és sor határértéke. Az exponenciális, a szinusz és a koszinusz függvény definíciója hatványsorral. Euler-formula.

**2. Trigonometrikus függvények.** Trigonometrikus függvények felírása exponenciálissal. Addíciós tételek trigonometrikus függvényekre. Arcsin és arccos definiálása. Algebrai alakban felírt komplex szám esetén a  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$  és  $\operatorname{th}$  meghatározása. Az  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$  és  $\operatorname{th}$  definiálása, valamint addíciós tételek ezen függvényekre.  $\operatorname{Arsh}$ ,  $\operatorname{Arch}$  függvények. Komplex szám trigonometrikus alakja és exponenciális alakja. Komplex számok szorzása és hatványozása exponenciális alakban. Komplex szám logaritmusa. Komplex szám komplex hatványra emelése. Komplex szám  $n$ -edik gyöke, ahol  $n \in \mathbb{N}$ .

**3. Polinomok és a  $\mathbb{K}^n$  vektortér.** Komplex polinomok. Polinomok maradékos osztása. Az algebra alaptétele. Polinom gyökei és együtthatói közötti összefüggés. Lagrange-interpoláció. A  $\mathbb{K}^n$  vektorainak összege, számszorosa és skaláris szorzata (koordinátákkal definiálva). Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség a  $\mathbb{K}^n$  téren. Az  $\mathbb{R}^n$  tér vektorai által bezárt szög.

**4. Az  $\mathbb{R}^3$  euklidészi tér.** Az  $\mathbb{R}^3$  térben skaláris, vektoriális és vegyes szorzat. Kronecker-delta, Levi–Civita-szimbólum. Az  $\mathbb{R}^3$  térben a vektoriális szorzat és a vegyes szorzat felírása a Levi–Civita-szimbólummal. Az egyenes és a sík egyenlete. Pontok, egyenesek és síkok egymástól való távolsága. Adott síkra/egyenesre való vetítés/tükrözés és adott síkban való forgatás mátrixa az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában.

**5. Vektortér.** Absztrakt vektortér fogalma az  $\mathbb{R}$  és a  $\mathbb{C}$  számtest felett. Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége és lineáris burka. Lineáris altér. Bázis. Dimenzió. Skaláris szorzás. Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Vektorok által bezárt szög. Norma. Minkowski-egyenlőtlenség. A  $\mathbb{K}^n$  téren a  $\|\cdot\|_p$  és a  $\|\cdot\|_\infty$  norma. Skaláris szorzásból származó norma.

**6. Skalárszorzos vektortér.** Gram–Schmidt-ortogonalizáció. Ortogonális, normált, ortonormált és teljes vektorrendszer. Vektor kifejtése ortonormált bázisban. Pitagorasz-tétel véges dimenzióban. Riesz-féle reprezentációs tétel véges dimenziós skalárszorzos vektortereken. Négyzetes mátrix adjungáltja és az adjungálás tulajdonságai.

**7. Lineáris leképezés.** Lineáris leképezés. Lineáris leképezés képtere és magtere. Adott  $U$  és  $V$  vektorterek esetén  $\operatorname{Lin}(U, V)$  is vektortér. Az  $U$  és a  $V$  vektortérben adott bázis esetén az  $A \in \operatorname{Lin}(U, V)$  leképezés mátrixa. Mátrixok összege, számszorosa és szorzata. Kapcsolat a lineáris leképezések műveletei és a mátrixműveletek között. Lineáris leképezés rangja. Dimenziótétel. Négyzetes mátrix nyoma és a nyom tulajdonságai. Mátrix transzponáltja és a transzponálás tulajdonságai.

**8. Determináns.** Permutációk csoportja. Transzpozíció. Permutációkon értelmezett előjel függvény ( $\varepsilon$ ). Mátrix determinánsa és a determináns alaptulajdonságai. Mátrix invertálása aldetermináns segítségével. Adjugált mátrix ( $\text{adj}(A)$ ). Invertálhatóság jellemzése determinánssal.

**9. Lineáris egyenletrendszerek.** Lineáris egyenletrendszer felírása vektorral és lineáris leképezéssel. Elemi sorműveletek. Lineáris egyenletrendszer lépcsős alakja. Lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss–Jordan-eliminációval. Mátrix invertálása Gauss–Jordan-eliminációval.

**10. Spektrum és normális operátorok.** Algebra, egységelemes algebra. Elem spektruma egységelemes algebrában. Jacobson-lemma. Az  $A : V \rightarrow V$  lineáris leképezés sajátértéke, sajátvektora és sajátaltere. Mátrixalgebrában lévő elem spektruma. Mátrixok speciális típusai: önadjungált, normális, ortogonális, unitér, projekció, idempotens és nilpotens. Önadjungált, unitér és projekció spektruma. Polarizációs formula. Az  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  lineáris leképezés normálisságának, önadjungálttságának és unitérségének jellemzése skaláris szorzással.

**11. Spektrálfelbontás.** Normális operátor sajátvektorainak tulajdonságai. Normális operátor diagonalizálhatósága. Normális operátor spektrálfelbontása. Normális operátor függvényének értelmezése. Normális operátor önadjungálttságának és unitérségének jellemzése a spektrummal.

**12. Pozitív operátorok.** Pozitív/negatív, pozitív/negatív definit és indefinit leképezés. Operátor pozitivitásának ekvivalens megfogalmazásai. Rendezés a pozitív operátorokon. A rendezés elemi tulajdonságai. Az  $n$ -monoton és az operátor monoton függvény.

**13. Blokk-mátrixok, Sylvester tétele és perturbációszámítás.** Blokk mátrixok. Műveletek blokk mátrixokkal. Sylvester-tétel. Perturbációszámítás első rendben.