

Számítási módszerek a fizikában 1, 8. hét

Lineáris transzformációk mátrixa és elemi mátrixműveletek

I. Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$ standard bázisában az alábbi lineáris transzformációk mátrixát.

1. Az origón átmenő, $v \in \mathbb{R}^3$ irányvektorú egyenesre való ortogonális vetítés és tükrözés. (A $v = (1, -1, 2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
2. Az origón átmenő, $n \in \mathbb{R}^3$ normálvektorú síkra való ortogonális vetítés és tükrözés. (Az $n = (1, -1, 2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
3. Határozzuk meg a (x, y) síkbeli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.
4. Határozzuk meg az $(1, 1, 0)$ tengely körüli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.
- 5* Határozzuk meg az $n \in \mathbb{R}^3$ tengely körüli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.

II. Mátrixhatványok.

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok k -adik ($k \in \mathbb{N}$) hatványát.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

2. Egy A mátrix esetén legyen

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Számítsuk ki az e^A mátrixot, ha az A mátrix a következő alakú, valamilyen $t \in \mathbb{R}$ valósra.

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III. Legyen $b \in \mathbb{R}^3$ rögzített vektor. Mi lesz az $\mathbb{R}^3$ tér standard bázisában a

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad x \mapsto b \times x$$

lineáris leképezés mátrixa?

IV. Tekintsünk egy egydimenziós harmonikus rezgőmozgást adott $D \in \mathbb{R}^+$ (direkciós állandó) és $m \in \mathbb{R}^+$ (tömeg) paraméterekkel. A koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a rugó nyugalmi hosszánál. Adott $t \in \mathbb{R}$ időpillanatban a test helye legyen $x(t)$ sebessége pedig $v(t)$. Ezekből képezzük a $z(t) = (x(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$ vektort. Mutassuk meg, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ időpillanathoz létezik olyan $A(t)$ lineáris transzformáció, melyre $z(t) = A(t)z(0)$ teljesül.

V*. Legyen $\omega \in \mathbb{R}^3$, $\|\omega\| \leq \pi$ vektor. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az ω vektor által meghatározott tengely körül forgat $\|\omega\|$ szöggel.

VI*. Tekintsük az alábbi egydimenziós tökéletesen rugalmas ütközéssel kapcsolatos problémát. Egy $M \in \mathbb{R}^+$ tömegű kiskocsi $v_0 \in \mathbb{R}^+$ sebességgel közelít a merev fal felé. A kiskocsi és a fal között egy $m \in]0, M[$ tömegű test van, mely $u_0 \in]-v_0, \infty[$ sebességgel közelít a kiskocsi felé. A feladatban minden ütközést tekintsünk teljesen rugalmasnak. A kiskocsi és a test n -edik ütközése után a kiskocsi sebessége a fal felé legyen v_n , illetve a test sebessége a fal felé u_n .

1. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén vezessük be a következő mennyiségeket: $\alpha_n = \sqrt{M}v_n$, $\beta_n = \sqrt{m}u_n$ és $w_n = (\alpha_n, \beta_n)$. Mutassuk meg, hogy az ütközés ekkor a $w_{n+1} = Bw_n$ alakba írható, ahol

$$B = \frac{1}{M+m} \begin{pmatrix} M-m & -2\sqrt{mM} \\ 2\sqrt{mM} & M-m \end{pmatrix}.$$

2. Igazoljuk, hogy ha $\varphi = \arccos\left(\frac{M-m}{M+m}\right)$, akkor $B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.
3. Mutassuk meg, hogy az ütközések száma $N = \left\lfloor \frac{1}{\varphi} \left(\pi - \arctg(x) - \arctg\left(x \frac{u_0}{v_0}\right) \right) \right\rfloor + 1$, ahol $x = \sqrt{\frac{m}{M}}$, ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ az egészrész függvény.
4. Figyeljük meg, hogy az $u_0 = 0$ esetben az ütközések száma nem függ a kiskocsi v_0 sebességétől! Próbáljuk dimenzióanalízissel megmagyarázni ezt a jelenséget. Mélyebb ismeretekkel az is megmutatható, hogy az $u_0 = 0$ esetben az ütközések száma (kis x értékek esetén)

$$N = \left\lfloor \frac{\pi}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{45}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \right\rfloor.$$

Ha a fallal vett ütközések számoljuk, akkor kis x értékek esetén az összes ütközések száma

$$N^* \approx \frac{\pi}{x}.$$

Speciális x értékek mellett az összes ütközések száma numerikus számítások szerint az alábbi.

x	N^*
10^0	3
10^{-1}	31
10^{-2}	314
10^{-3}	3141
10^{-4}	31415
10^{-5}	314159