

Számítási módszerek a fizikában 1, 10. hét

Sajátérték, sajátvektor és báziscsere transzformáció

I. Adjuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II. Tegyük fel, hogy az $O = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix az $\mathbb{R}^3$ térben egy tengely körüli forgatást ír le. Határozzuk meg a tengelyt és a forgatás szögét.

III. A V vektorteret az $\mathcal{A}$ koordinátarendszerben az $(e_i)_{i \in I}$ bázisvektorokkal koordinátázzuk a $\mathcal{B}$ koordinátarendszerben pedig az $(f_i)_{i \in I}$ bázisvektorokkal. Amennyiben a T lineáris leképezést a $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}$ mátrixszal reprezentáljuk az $\mathcal{A}$ koordinátarendszerben határozzuk meg T mátrixát $\mathcal{B}$ koordinátarendszerben az alábbi esetekben.

1. $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 2)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, -1)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$
3. $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (2, 2, 1)$, $f_3 = (1, 2, 4)$,
 $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

A fenti példák alapján fogalmazzuk meg precízen és igazoljuk a *determináns és a nyom bázisfüggetlen* kijelentést.

IV. Legyen $A : V \rightarrow V$ lineáris leképezés a skalárszorozatos véges dimenziós V vektortéren. Mutassuk meg, hogy $(\text{Ran } A)^\perp = \text{Ker } A^*$ teljesül.

V. Legyen V véges dimenziós skalárszorozatos vektortér. Igazoljuk az alábbi állításokat.

1. Minden nem üres $L \subseteq V$ esetén $L^\perp$ lineáris altér.
2. Minden nem üres $L \subseteq K \subseteq V$ esetén $K^\perp \subseteq L^\perp$.
3. Minden nem üres $L \subseteq V$ esetén $L \subseteq L^{\perp\perp}$.
4. Ha $W \subseteq V$ lineáris altér, akkor $W = W^{\perp\perp}$.

VI*. A $V = \mathbb{R} \times \mathbf{i} \cdot \mathbb{R}$ vektortérben vegyük a kanonikus bázist, és ebben a bázisban írjuk fel annak a lineáris leképezésnek megfelelő mátrixot, mely α szöggel forgat az origó körül. Írjuk fel az $\mathbf{i}\alpha$ szöggel való forgatás $A(\alpha)$ mátrixát és igazoljuk, hogy

$$A(\alpha) : \mathbb{R} \times \mathbf{i} \cdot \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbf{i} \cdot \mathbb{R} \quad (x, \mathbf{i} \cdot y) \mapsto (x \operatorname{ch} \alpha - y \operatorname{sh} \alpha, \mathbf{i} \cdot (-x \operatorname{sh} \alpha + y \operatorname{ch} \alpha))$$

teljesül. Legyen c pozitív valós paraméter és

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbf{i} \cdot \mathbb{R} \quad (x, t) \mapsto (x, \mathbf{i} ct)$$

leképezés. Számoljuk ki az

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (\phi^{-1} \circ A(\alpha) \circ \phi)(x, y)$$

lineáris leképezés mátrixát! Igazoljuk, hogy $|v| < c$ valós paraméter esetén, ha $\alpha = \text{arth}(v/c)$, akkor

$$L(v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, t) \mapsto \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Igazoljuk, hogy ha $L(v_1) \circ L(v_2) = L(v_3)$ és $L(u_1) \circ L(u_2) \circ L(u_3) = L(u_4)$ akkor

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \quad u_4 = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{1 + \frac{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1}{c^2}} + \frac{u_1 u_2 u_3}{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1}$$

teljesül!