

Számítási módszerek a fizikában 1.
2. zh., avagy Fikusz Algebrikusz kalandjai
 2025. 12. 01. 14.15-15.45

Név:
 Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ :
/10	/10	/10	/10	/4 × 5	

1. Fikusz Algebrikusz, a híresen kíváncsi manó, egy régi kódexben rátalált a $D = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & 2 & 1 \\ ? & ? & 3 \end{pmatrix}$ szövegtöredékre, ahol a kérdőjel helyén álló számokat sajnos már nem tudta elolvasni. Amikor a kódex keletkezett, még csak a valós számokat ismerték, továbbá a szövegkörnyezetből megtudta, hogy $D^T = D$, D sajátértékeinek az összege 8, továbbá az $(1, 1, 1)$ vektor egy sajátvektora. Segítsünk Fikusz Algebrikusznak rekonstruálni a mátrix hiányzó elemeit, amennyiben ez lehetséges!

2. A $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix Fikusz Algebrikusz egyik kedvenc mátrixa, mely lineáris transzformációt határoz meg az $\mathbb{R}^2$ vektortéren a kedvenc $\mathcal{A}$ bázisában, ahol a bázisvektorok $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, 2)$. Hogyan néz ki a T leképezés mátrixa az emberek által kedvelt $\mathcal{B}$ bázisban, ami az $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (0, 1)$ vektorokból áll?

3. Egy hideg téli napon, Fikusz Algebrikusz a levelet kapott az angol A. N. Chooras világhírű elméleti fizikustól, melyben –többek között– az alábbi kis feladvány állt.

Ha $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, akkor vajon melyik 3×3 -as X mátrixra teljesül az, hogy

$$CX = XC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}?$$

Segítsünk Algebrikusznak megoldani e problémát!

4. Fikusz Algebrikusz a $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot szándékozik macskájának (Dorminak) adni játszani. Dormi azonban allergiás azon mátrixokra, melyeknek a nulla sajátértéke. Biztonságosan játszhat-e Dormi a fenti B mátrixszal?

A B mátrix determinánsának a kiszámolásával válaszoljunk a kérdésre.

5. Fikusz Algebrikusz egyik este otthon számolgatott. Mágikus szögmérőjén kimérte az $\alpha = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ szöget, húzott ebbe az irányba egy három egységnyi hosszú szakaszt, majd leolvasta a szakasz végpontjának vízszintes koordinátáját. Mennyi volt ez a koordináta?

A kérdés megválaszolásához tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, mátrixot, valamint az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ függvényt.

- Határozzuk meg az A mátrix $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sajátértékeit és v_1, v_2, v_3 sajátvektorait.
- Adjuk meg a v_i vektor által meghatározott egyenesre való ortogonális vetítés P_i mátrixát az $i = 1, 2, 3$ esetben.
- Adjuk meg az A mátrix spektrálfelbontását.
- Számoljuk ki az $f(A)$ mátrixot.