

Analízis 2, 1. hét

Riemann-integrál közelítő összege

I.^A Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{ak}{n}\right)} = \frac{(1+a)^{1+\frac{1}{a}}}{e}$$

teljesül.

II.^A Legyen $f \in \mathcal{R}([0, 1], \mathbb{R})$ olyan függvény, melyhez létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in [0, 1]$ esetén $f(x) \geq c$ teljesül. Keressük meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

határértéket.

III.^H Az eddigieket felhasználva bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

IV.* Mutassuk meg, hogy minden $f \in C([a, b], \mathbb{R}^+)$ függvényre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n} = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

V.^H Igazoljuk az alábbi sorösszegeket, ahol $a \in]1, \infty[$.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2$	2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \pi$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} \sum_{k=1}^n k^{a-1} = \frac{1}{a}$	4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}$

VI.* Legyen $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olyan függvény, melyre $\lim_{\infty} f = a$ és $\lim_{-\infty} f = b$ teljesül. Számoljuk ki a

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z (f(x+1) - f(x)) \, dx$$

határértéket.

Integrálfüggvény

I.^A Határozzuk meg a következő függvények deriváltját!

$$\begin{array}{ll} 1. & E(x) = \int_0^{4x} \sqrt{1+t^8} \, dt \\ 2. & F(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt \\ 3. & G(x) = \int_0^{4x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt \\ 4. & H(x) = \int_x^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt \end{array}$$

II.^H Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{d}{du} \int_u^w \sin x^2 \, dx + \frac{d}{dw} \int_u^w \sin x^2 \, dx = \int_{u^2}^{v^2} \cos x \, dx$$

egyenlet teljesül!

III.^H Határozzuk meg az $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-2}^x t e^{-4t} \, dt$ képlettel értelmezett függvény minimumát és maximumát a $[-2, 2]$ intervallumon!

IV.^H Tekintsük az $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^7 + 2t + 6} \, dt$ függvényt.

1. Az F függvénynek van-e lokális szélsőértéke a $]0, 3[$ intervallumban?
2. Hol veszi fel F a minimumát illetve maximumát a $[0, 3]$ intervallumban?
3. Van-e inflexiós pontja az F függvénynek a $]0, 3[$ intervallumban?

V.^A Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll} 1. & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) \, dt}{x^2} \\ 2. & \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} \, dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} \, dt} \\ 3. & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} \, dt}{x^3} \\ 4. & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{arctg} 3t \, dt}{x^2} \\ 5. & \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} \, dt}{\frac{1}{x}} \\ 6. & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \, dt}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{array}$$

VI.^H Keressünk hibát az alábbi számításban.

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \, dx = \log x \cdot \frac{1}{\log x} - \int \log x \cdot \frac{-1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} \, dx = 1 + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \, dx$$

$$0 = 1$$

VII.^H Legyen $f \in \mathcal{R}([0, \pi], \mathbb{R})$ és mutassuk meg, hogy ekkor

$$\int_0^\pi f(\sin x) \cos x \, dx = 0$$

teljesül.