

Analízis 2, 2. hét

Normált terek topológiája

I^h Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Igazoljuk, hogy $B_r(x)$ konvex halmaz. Ennek felhasználásával mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^2$ téren a $\|\cdot\|_p$ leképezés nem norma, ha $p < 1$.

II^h Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $X \subseteq V$ konvex halmaz. Mutassuk meg, hogy ekkor $\text{Int } X$ és $\overline{X}$ is konvex halmaz.

III^A A $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ tér minden $f \in V$ vektorára legyen $\|f\|_1 = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ és $\|f\|_2 = \int_0^1 |f|$.

1. Igazoljuk, hogy $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ norma.
2. Igazoljuk, hogy $(V, \|\cdot\|_1)$ Banach-tér.
3. Igazoljuk, hogy $(V, \|\cdot\|_2)$ nem Banach-tér.
4. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{\|\cdot\|_1}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|_2}(0)$ teljesül.
5. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{\|\cdot\|_2}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|_1}(0)$ teljesül.
6. Igazoljuk, hogy $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ nem ekvivalens normák.
7. Igazoljuk, hogy ha az $X \subseteq V$ halmaz nyílt a $\|\cdot\|_2$ norma szerint, akkor nyílt a $\|\cdot\|_1$ norma szerint is.
8. Igazoljuk, hogy ha az $X \subseteq V$ halmaz zárt a $\|\cdot\|_2$ norma szerint, akkor zárt a $\|\cdot\|_1$ norma szerint is.
9. Tekintsük a $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(0)$ leképezést. A $\|\cdot\|_1$ vagy a $\|\cdot\|_2$ norma szerint lesz φ folytonos?
10. Legyen $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezés. A $\varphi \|\cdot\|_1$ norma szerinti folytonosságából következik-e $\|\cdot\|_2$ szerinti folytonossága?
11. Legyen $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezés. A $\varphi \|\cdot\|_2$ norma szerinti folytonosságából következik-e $\|\cdot\|_1$ szerinti folytonossága?
12. Legyen $X \subseteq V$. Legyen X_i az X halmaz $\|\cdot\|_i$ norma szerinti belseje az $i = 1, 2$ esetben. Ekkor teljesül-e az $X_1 \subseteq X_2$ vagy az $X_2 \subseteq X_1$ tartalmazások valamelyike?
13. Legyen $X \subseteq V$. Legyen X_i az X halmaz $\|\cdot\|_i$ norma szerinti lezártja az $i = 1, 2$ esetben. Ekkor teljesül-e az $X_1 \subseteq X_2$ vagy az $X_2 \subseteq X_1$ tartalmazások valamelyike?
14. Az $X \subseteq V$ halmaz $\|\cdot\|_1$ norma szerinti kompaktságából/korlátosságából következik-e a $\|\cdot\|_2$ norma szerinti kompaktsága/korlátossága?
15. Az $X \subseteq V$ halmaz $\|\cdot\|_2$ norma szerinti kompaktságából/korlátosságából következik-e a $\|\cdot\|_1$ norma szerinti kompaktsága/korlátossága?
16. Tekintsük az $M = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ lineáris alteret. Mutassuk meg, hogy M zárt a $\|\cdot\|_1$ norma szerint, de nem zárt a $\|\cdot\|_2$ norma szerint.

IV^h Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $C^1([a, b], \mathbb{R}) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists \tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \tilde{f}|_{[a, b]} = f, \tilde{f}' \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$.

1. Igazoljuk, hogy a $\|f\|_1 = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ és a $\|f\|_2 = |f(a)| + \int_a^b |f|$ leképezés norma ezen a vektortéren.
2. Összehasonlíthatók-e ezen normák, azaz igaz-e hogy az egyik norma szerinti minden nyílt halmaz nyílt a másik norma szerint is?
3. Legyen $c \in]a, b[$ és tekintsük a $\varphi(f) = f'(c)$ leképezést. Folytonos-e φ az $\|\cdot\|_1$ vagy a $\|\cdot\|_2$ norma szerint?