

Analízis 2, 4. hét

Skálárszorozatos terek

I^H Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}$ feletti $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ skálárszorozatos vektortérben az alábbiak teljesülnek.

1. Az $(x + y) \perp (x - y)$ reláció pontosan akkor teljesül, ha $\|x\| = \|y\|$.
2. Ha $\|x\| = \|y\| = 1$ és $x \perp y$, akkor $\|x - y\| = \sqrt{2}$.
3. Minden $x \in V$ esetén az $\{y \in V \mid x \perp y\}$ halmaz lineáris altér V -ben.

II^H Skáláris szorzást definiálnak-e az $\mathbb{R}$ feletti $V = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ vektortéren az alábbi kifejezések?

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 fg \quad \langle f, g \rangle_2 = \int_0^1 f'g' \quad \langle f, g \rangle_3 = f(0)g(0) + \int_0^1 f'g'$$

III^H Mekkora a $p(x) = x^2 + 1$ és a $q(x) = x^3$ polinomok által bezárt szög a polinomok V vektorterében, ha a polinomok skáláris szorzatát a $\langle P, Q \rangle = \int_0^\alpha (PQ)$ kifejezéssel definiáljuk, ahol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméter?

IV^A A $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren tekintsük a $p, q \in \mathbb{R}$ paraméterekkel definiált

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 - px_1y_2 - qx_2y_1$$

leképezést.

1. Mutassuk meg, hogy a fenti leképezés pontosan akkor skáláris szorzás, ha $p = q \in]-1, 1[$ teljesül.
2. Mely $p = q \in]-1, 1[$ értékek esetén lesz az $(1, 0)$ és az $(1, 1)$ vektorok által bezárt szög 30° , 45° és 60° a fenti skáláris szorzás szerint?

V^A Jelölje $M_n(\mathbb{K})$ azon $n \times n$ -es mátrixok terét, melynek elemei a $\mathbb{K}$ számtestből valók.

1. Mutassuk meg, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^*B)$ skáláris szorzás.
2. Igazoljuk, hogy minden $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ önadjungált mátrixra $|\text{Tr}(AB)|^2 \leq \text{Tr}(A^2) \text{Tr}(B^2)$ teljesül.
3. Mekkora szöget zár be egymással az $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix az $M_2(\mathbb{R})$ térben?
4. Adjuk meg azt a lineáris alteret, melynek elemei merőleges az egységmátrixra.

VI^A Jelölje $M_n(\mathbb{C})$ az $n \times n$ -es komplex elemű mátrixok terét és legyen $D \in M_n(\mathbb{C})$ pozitív definit mátrix.

1. Mutassuk meg, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(DA^*DB)$ skáláris szorzás.
2. Igazoljuk, hogy minden $t \in [1, \infty[$ paraméter esetén $\text{Tr} D^t \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\text{Tr} D^{2t}}$.

VII^H A $C([-1, 1], \mathbb{R})$ vektorteret lássuk el a $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$ skáláris szorzással és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$. Mutassuk meg, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}.$$