

Analízis 2, 5. hét

Függvénysorozatok és függvénysorok

I^H Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományon.

$$\begin{array}{lll} 1. & \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx} & 2. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n & 3. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx} \\ 4. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}} & 5. & \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{x^2 + n^2} \right) & 6. & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{x}{n} + n\pi \right) \end{array}$$

II^A Mely valós x paraméterek esetén konvergensek az alábbi sorok?

$$\begin{array}{lll} 1. & \sum_{n=0}^{\infty} nx^n & 2. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n & 3. & \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^n \\ 4. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & 5. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n)!} (x+7)^n & 6. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{9^n} (x-2)^{2n} \end{array}$$

III^H Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$$

IV^H Igazoljuk, hogy

1. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n9^n} x^n$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-8, 9]$ halmazon;
2. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n9^n} x^{2n}$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-3, 3]$ halmazon.

V^A Igazoljuk a függvénysorok deriváltjára kapott kifejezéseket!

$$\begin{array}{ll} 1. & \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{k^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4 + x^2} \\ 2. & \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} e^{-kx^2} \right) = -2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-kx^2} \end{array}$$

VI^A Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{arctg}(kx)}{2^{k-1}} \quad \text{és} \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{arctg} \frac{1-x}{k}}{k+1}.$$

Legyen $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ és $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$. Határozzuk meg az $f'(0)$ és a $g'(1)$ értékét.

VII^A Határozzuk meg az alábbi határértékeket.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{arctg} n^5 x^2}{x + \sqrt{n}} dx \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{e^{nx}} dx$$

VIII.^H Tekintsük a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ hatványsort.

1. Mutassuk meg, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ halmazon.

2. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. (Segítség: $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$.)

3. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi - \ln 4}{4}$.

(Segítség: $\frac{\pi - \ln 4}{4} = \int_0^1 \arctan x \, dx$.)

IX.^H Igazoljuk, hogy minden $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}.$$