

Analízis 2, 6. hét

Mátrixfüggvények

I.^A Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ mátrixot.

1. Határozzuk meg a mátrix $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$, sajátértékeit, $(v_i)_{i=1,2,3}$ sajátvektorait és a sajátvektorhoz tartozó P_i projekciót.
2. Mutassuk meg, hogy (a spektrálfelbontás)

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

teljesül.

3. Határozzuk meg az A^{100} és az A^{-1} mátrixot.
4. Igazoljuk, hogy ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{40}(x^3 - 18x^2 + 72x)$, akkor

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.^B Tekintsük az alábbi mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1+i & -1+i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Írjuk fel a mátrixok spektrálfelbontását.
3. Számolással igazoljuk, hogy $\sin\left(\frac{\pi A}{2}\right) = 0 \quad \sin\left(\frac{\pi B}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, valamint $\cos\left(\frac{\pi C}{2}\right) = -\operatorname{ch}(\pi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ teljesül.

III.^B Tekintsük az alábbi mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Adjuk meg a mátrixok spektrálfelbontását.
3. Határozzuk meg a mátrixok századik hatványát.
4. Tekintsük az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ függvényt. Igazoljuk, hogy $f(A) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ és $f(B) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

IV.^A Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ teret az euklidészi skaláris szorzással és azt az $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris leképezést, melynek mátrixa a standard bázisban $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Mutassuk meg, hogy A pozitív definit.
2. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan pozitív mátrix létezik, melynek a négyzete A . (Ennek a jele $A^{\frac{1}{2}}$.)
3. Számoljuk ki az $A^{\frac{1}{2}}$ mátrixot.
4. Hány olyan (valós) mátrix van, melynek a négyzete A ?

V.* Legyen $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ és $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Mutassuk meg, hogy A minden λ sajátértékére $0 < \lambda$ teljesül, ezért jól értelmezett a $\log A$ mátrix.
2. Mutassuk meg, hogy A és B spektrálfelbontásában ugyanazok a projekciók szerepelnek, ezért $AB = BA$.
3. Mutassuk meg, hogy $B(\log A) = (\log A)B$ teljesül.
4. Bizonyítsuk be, hogy $\exp(B(\log A)) = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$ (mely formálisan az A^B mátrixnak felel meg).

VI.* Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixokat.

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Írjuk fel a mátrixokat $S^{-1}JS$ alakban, ahol J Jordan-mátrix.
3. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x\pi)$, $g(x) = 2^x$ és $q = \log(2)$. Igazoljuk az alábbiakat.

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & f(B) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 - 1 & -\pi^2 \\ 0 & \pi^2 & \pi^2 - 1 \end{pmatrix} & f(C) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ g(A) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 45 & 49 \end{pmatrix} & g(B) &= 2 \begin{pmatrix} 1 & -2q & -2q \\ q & -q^2 + q + 1 & q(1 - q) \\ -q & q(q - 1) & q^2 - q + 1 \end{pmatrix} & g(C) &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 10 & 7 & 7 \\ 7 & 10 & 7 \\ 7 & 7 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$