

Analízis 2, 8. hét

Komplex differenciálhatóság és a Cauchy–Riemann egyenletek

I^h Számoljuk ki az $\exp(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$, $\sin(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right)$, $\ln(-4i)$ és $\operatorname{ch}(6i)$ kifejezés valós illetve képzetes részét!

II^h A komplex számok körében oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

$$e^{i\bar{z}} + 5 = 0 \quad \sin(2z) + 3i = 0 \quad \operatorname{ch} z = 0 \quad \operatorname{sh}(3i\bar{z}) = 0 \quad \sin z = i \cos z$$

III^A Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \operatorname{sh}(3i\bar{z})$. Hol differenciálható és hol reguláris az f függvény? Mibe viszi át az f függvény a $\operatorname{Re} z = \frac{\pi}{6}$ egyenest?

IV^A Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{z+1}{z+i}$$

leképezésnél a nyújtási együtthatót, illetve a forgatási szöveget a $z_0 = 1$ pontban!

V^A Cauchy–Riemann-egyenletek alkalmazása.

1. Hol differenciálható és hol reguláris az $f(x+iy) = (x^3 + 2xy) + i(3x^2y + 6y)$ függvény?
2. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy a $v(x, y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$ függvény az egész komplex számsíkon értelmezett reguláris függvény valós része legyen.
3. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $u(x, y) = cx^3 + 36xy^2 + xy$ függvény az egész komplex számsíkon értelmezett reguláris függvény képzetes része legyen!
4. Milyen c érték mellett létezik a $v(x, y) = -x^3 + cxy^2 - y$ függvénynek harmonikus párja? Keressük meg, azt az $u(x, y)$ harmonikus párt, melyre $u(0, 0) = 0$ teljesül!

VI^h Legyen $u(x, y) = x^3 + cxy^2 - 2xy$.

1. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az u egy reguláris f függvény valós része legyen!
2. Írjuk fel ezen f függvények közül azt, amelynél az $f(-1+i)$ függvényérték valós!
3. Határozzuk meg $f'(-1+i)$ értékét!

VII^A Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Mutassuk meg, hogy a $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ függvény is holomorf.