

Analízis 2, 9. hét

Komplex függvény vonalmenti integrálja és Cauchy integrálformulái

I.^A Számoljuk ki az alábbi $\int_{\gamma} f$ alakú integrálokat, ha

1. $f(z) = e^{2\bar{z}}$ és γ az origóból a $-1 + i$ pontba menő szakasz;
2. $f(z) = \bar{z}$ és γ az origó körüli egységsugarú kör pozitív irányítással;
3. $f(z) = \frac{1}{z}$ és γ az origó körüli egységsugarú kör pozitív irányítással;
4. $f(z) = z^n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és γ az origó körüli $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú kör pozitív irányítással.

II.^A Számoljuk ki az f függvény γ görbe menti integrálját.

- | | | |
|---|---|----------------|
| 1. $f(z) = \operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}(z)$ | $\gamma(t) = t + i t^2$ | $t \in [0, 2]$ |
| 2. $f(z) = e^{i\bar{z}}$ | $\gamma(t) = \cos(\pi t) + i \sin(\pi t)$ | $t \in [0, 1]$ |
| 3. $f(z) = z e^{z^2}$ | $\gamma(t) = 2t + (2 + 2t)$ | $t \in [1, 5]$ |
| 4. $f(z) = z \sin z \cos z$ | $\gamma(t) = 2 \cos(\pi t) + i \sin(\pi t)$ | $t \in [1, 0]$ |

III.^A Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és tekintsük a

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto a + r e^{n 2\pi i t}$$

görbét. Határozzuk meg a γ görbe indexfüggvényét, azaz adjuk meg az

$$\operatorname{Ind}_{\gamma} : \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran} \gamma \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{x - z} dx$$

függvényt.

IV.^A Cauchy integrálformulái alapján számoljuk ki az adott $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény és γ pozitív irányítású zárt görbe mellett a $\int_{\gamma} f$ vonalmenti integrált.

1. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, γ : az origó körüli 2 egység sugarú kör;
2. $f(z) = \frac{e^{2z}}{z-1}$, γ : az 1 körüli π egység sugarú kör;
3. $f(z) = \frac{\cos(\pi z) - 1}{z^2 + 2z - 3}$, γ : az origó körüli r egység sugarú kör, ahol $r \in \left\{\frac{1}{2}, 2, 4, 8\right\}$;
4. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2}$, γ : az origó körüli 1 egység sugarú kör;
5. $f(z) = \frac{z^5 + 11z^2 + 3}{(z^2 + 4)^2}$, γ : az $1 + i$ körüli 2 egység sugarú kör;
6. $f(z) = \frac{z^6}{(z-1)^2(z+2)^2}$, γ : az origó körüli 10 egység sugarú kör;
7. $f(z) = \frac{\cos(3z)}{z^3}$, γ : az origó körüli 1 egység sugarú kör;
8. $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^3}$, γ : az i körüli 2 egység sugarú kör.